

Applications du produit scalaire

1. Géométrie repérée

A. Rappels et compléments sur les équations cartésiennes d'une droite

■ DÉFINITION :

On considère un repère du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Le **déterminant d'un couple de vecteurs** $(\vec{u}; \vec{v})$ du plan où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est le nombre réel, noté $\det(\vec{u}; \vec{v})$, défini par :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$$

Exemple :

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, calculer $\det(\vec{u}; \vec{v})$.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u}; \vec{v}) &= -2 \times 4 - (-1) \times 3 \\ &= -8 + 3 \\ &= -5\end{aligned}$$

Même question avec

$\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} + \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u}; \vec{v}) &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 1 \times 1 \\ &= 3 - 2 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Que peut-on dire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
 $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Remarque : On remarque que l'égalité

$$xy' - x'y = 0$$

traduit une relation de proportionnalité entre les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est donc équivalente à l'assertion « les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ».

■ PROPRIÉTÉ :

$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Remarque : Il est pratique de noter $\det(\vec{u}; \vec{v})$ sous la forme $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

■ PROPRIÉTÉ :

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, toute droite (d) admet une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

où a , b et c sont trois nombres réels, avec a et b **non simultanément nuls**, c'est-à-dire $(a; b) \neq (0; 0)$.

■ DÉFINITION :

Cette équation est appelée **une équation cartésienne de la droite** (d) .

Démonstration. On considère la droite $(d) = d(A; \vec{u})$ passant par le point $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta)$.

« Un point M de coordonnées $(x; y)$ appartient à la droite (d) »

si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = k \vec{u}$

si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$

si et seulement si $\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$

si et seulement si $\beta x + (-\alpha)y + (-\beta x_A + \alpha y_A) = 0$.

Donc, en posant $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = -\beta x_A + \alpha y_A$, on obtient le résultat attendu. $\square$

Exemple :

Trouver une équation cartésienne de la droite (AB) où $A(-1; 5)$ et $B(3; 2)$.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 2 - 5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Ainsi on a les équivalences suivantes :

$$M(x; y) \in (AB) \iff \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x + 1 & 4 \\ y - 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -3(x + 1) - 4(y - 5) = 0$$

$$\iff -3x - 3 - 4y + 20 = 0$$

$$\iff -3x - 4y + 17 = 0$$

$$\iff 3x + 4y - 17 = 0$$

Exemple :

Considérons maintenant l'ensemble (E) des points $M(x; y)$ du plan tels que : $-x + 4y + 3 = 0$. Cet ensemble est-il une droite du plan ?

- Remarquons par exemple que

$$-(-1) + 4 \times (-1) + 3 = 0$$

ce qui signifie que le point $A(-1; -1)$ est un point de l'ensemble (E) .

- On en déduit que

$$\begin{cases} -x + 4y + 3 = 0 \\ -x_A + 4y_A + 3 = 0 \end{cases}$$

par différence, on obtient

$$-(x - x_A) + 4(y - y_A) = 0$$

et en fait il y a équivalence.

$$\text{Or} \quad -(x - x_A) + 4(y - y_A) = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x - x_A & -4 \\ y - y_A & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u}) = 0$$

où $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ce qui montre que

$$E = d(A; \overrightarrow{u})$$

On montre plus généralement que :

■ PROPRIÉTÉ :

L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $ax + by + c = 0$ où $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Exemple :

Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que :

$$(3x + 4y - 17) - (-x + 4y + 3) = 0$$

$$(3x + 4y - 17) - (-x + 4y + 3) = 0$$

$$\iff 3x + 4y - 17 + x - 4y - 3 = 0$$

$$\iff 4x - 20 = 0$$

$$\iff x - 5 = 0$$

$$\iff x = 5$$

Ainsi l'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient $(3x + 4y - 17) - (-x + 4y + 3) = 0$ est la droite verticale d'équation $x = 5$.

Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que :

$$(3x + 4y - 17)(-x + 4y + 3) = 0$$

$$(3x + 4y - 17)(-x + 4y + 3) = 0$$

$$\iff 3x + 4y - 17 = 0 \text{ ou } -x + 4y + 3 = 0$$

Or, on a vu que $3x + 4y - 17 = 0$ est l'équation cartésienne d'une droite du plan et $-x + 4y + 3 = 0$ l'est aussi.

Ainsi l'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient $(3x + 4y - 17)(-x + 4y + 3) = 0$ est la **réunion** de deux droites dont les équations cartésiennes sont $3x + 4y - 17 = 0$ et $-x + 4y + 3 = 0$.

Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que :

$$(3x + 4y - 17)^2 + (-x + 4y + 3)^2 = 0$$

$$(3x + 4y - 17)^2 + (-x + 4y + 3)^2 = 0$$

$$\iff 3x + 4y - 17 = 0 \text{ et } -x + 4y + 3 = 0$$

L'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient $(3x + 4y - 17)(-x + 4y + 3) = 0$ est l'**intersection** de deux droites d'équations cartésiennes $3x + 4y - 17 = 0$ et $-x + 4y + 3 = 0$. Il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} -x + 4y + 3 = 0 \\ -x_A + 4y_A + 3 = 0 \end{cases}$$

On trouve que le point d'intersection est le point $P\left(5; \frac{1}{2}\right)$. Ainsi l'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient

$$(3x + 4y - 17)^2 + (-x + 4y + 3)^2 = 0$$

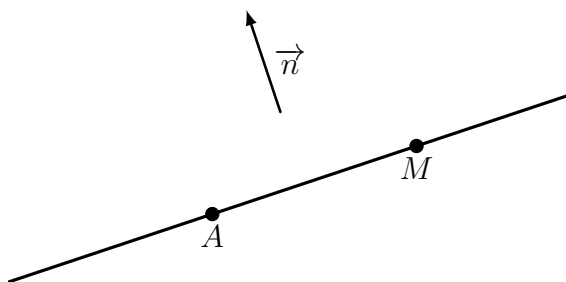
est le point $P\left(5; \frac{1}{2}\right)$.

Remarque : Si $b \neq 0$, et si la droite (d) admet pour équation cartésienne : $ax + by + c = 0$, cette équation peut s'écrire aussi sous la forme $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, ou encore $y = mx + p$ où m et p sont deux réels. Cette équation est l'**équation réduite** de la droite : le réel m est son **coefficient directeur** et le réel p est son **ordonnée à l'origine**.

Comme l'équation réduite $y = mx + p$ peut s'écrire $mx - y + p = 0$, on en déduit que le vecteur de coordonnées $(1; m)$ est un vecteur directeur de la droite (d) de coefficient directeur m .

B. Vecteur normal et équation cartésienne de droite

Lorsqu'une droite est définie par un de ses points et un vecteur $\vec{n}$ de direction orthogonale à celle de la droite, il est plus commode de trouver une équation cartésienne de cette droite en utilisant le produit scalaire.



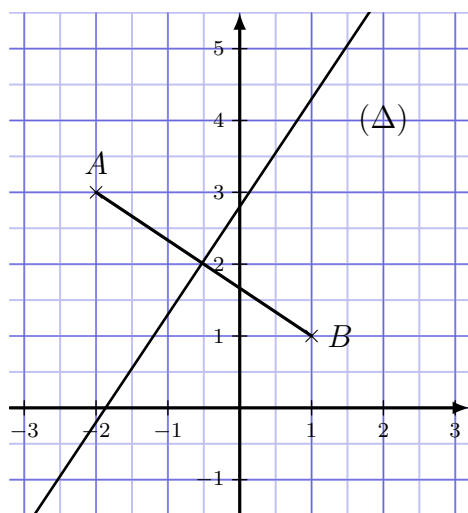
■ DÉFINITION :

Le vecteur $\vec{n}$ est dit **normal**¹ à la droite (d) si la direction du vecteur $\vec{n}$ est orthogonale à celle de la droite (d).

Exemple :

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, on considère les points $A(-2; 3)$ et $B(1; 1)$.

On veut trouver une équation cartésienne de la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$.



Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

I a comme coordonnées $I\left(\frac{-2+1}{2}; \frac{3+1}{2}\right)$
c'est-à-dire

$$I\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$$

Un point M de coordonnées $(x; y)$ appartient à la droite (d)

si et seulement si $\overrightarrow{IM}$ orthogonal à $\vec{n}$

si et seulement si $\overrightarrow{IM} \cdot \vec{n} = 0$

si et seulement si $\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

si et seulement si $3\left(x + \frac{1}{2}\right) - 2(y - 2) = 0$

si et seulement si $3x + \frac{3}{2} - 2y + 4 = 0$

si et seulement si $3x - 2y + \frac{11}{2} = 0$

si et seulement si $y = \frac{3}{2}x + \frac{11}{4}$.

Généralisation :

Soit (d) la droite passant par le point $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Alors :

Un point M de coordonnées $(x; y)$ appartient à la droite (d)

si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$

si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

si et seulement si $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$

si et seulement si $\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) = 0$

si et seulement si $\alpha x + \beta y + (-\alpha x_A - \beta y_A) = 0$

Ainsi :

■ PROPRIÉTÉ :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si la droite (d) admet pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, alors un vecteur normal à la droite (d) est le vecteur

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Exemple :

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est-il normal à la droite (d) d'équation $y = 2x + 1$?

On écrit l'équation réduite de la droite sous la forme : $2x - y + 1 = 0$, que l'on peut aussi écrire $x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0$.

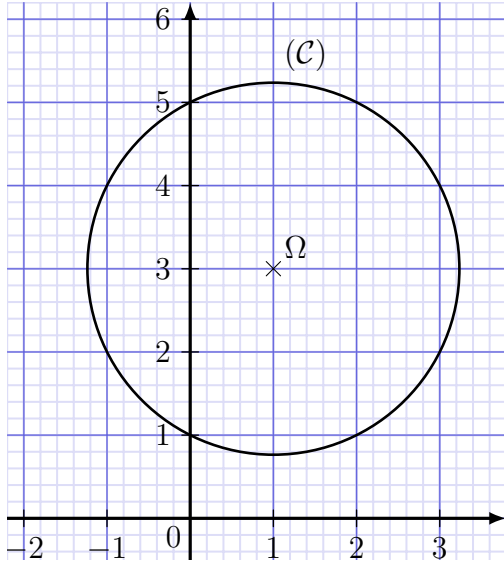
Donc $\vec{n}$ est bien un vecteur normal à cette droite.

1. *norma* signifie équerre en latin

C. Équation cartésienne de cercle

Exemple :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle de centre le point $\Omega(1; 3)$ et de rayon $\sqrt{5}$.



Le point $M(x; y)$ est un point de $\mathcal{C}(\Omega; \sqrt{5})$ si et seulement si $\Omega M = \sqrt{5}$

si et seulement si $\Omega M^2 = 5$
(car ΩM est une distance, donc un nombre positif)

si et seulement si $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$ (car le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé)

si et seulement si $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

Cette égalité, qui caractérise donc l'appartenance du point $M(x; y)$ au cercle $\mathcal{C}(\Omega; \sqrt{5})$ est une **équation cartésienne de ce cercle**.

On démontre plus généralement de la même manière la proposition suivante.

■ PROPRIÉTÉ :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si Ω est le point de coordonnées $(x_0; y_0)$ et si r est un réel positif, alors le cercle $\mathcal{C}(\Omega; r)$ admet pour équation cartésienne

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

qui peut aussi s'écrire

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

Exemple :

Considérons l'ensemble (E) des points $M(x; y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$.
Cet ensemble est-il un cercle ?

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2x} + \underbrace{y^2 - 6y} - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x - 1)^2 - 1} + \underbrace{(y - 3)^2 - 9} - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = 25 \text{ où } \Omega \text{ est le point de coordonnées } (1; 3)$$

$$\Leftrightarrow \Omega M = 5 \text{ car } \Omega M \text{ est une distance, donc positive.}$$

$$\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(\Omega; 5)$$

Ainsi l'ensemble (E) est un cercle.

Répondre à la même question avec l'ensemble (E') des points $M(x; y)$ du plan tels que :
 $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2x} + \underbrace{y^2 - 6y} + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x - 1)^2 - 1} + \underbrace{(y - 3)^2 - 9} + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 0$$

Ainsi l'ensemble (E) est un point de coordonnées $(1; 3)$. Le cercle est réduit à un point.

Répondre à la même question avec l'ensemble (E') des points $M(x; y)$ du plan tels que :
 $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 20 = 0$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2x} + \underbrace{y^2 - 6y} + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x - 1)^2 - 1} + \underbrace{(y - 3)^2 - 9} + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = -10$$

Ainsi, il n'existe pas de point du plan qui vérifie ces conditions.



Attention

L'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant l'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ où a, b et c sont trois nombres réels n'est pas nécessairement un cercle.

3. Relations métriques dans le triangle

A. Théorème d'Al-Kashi²

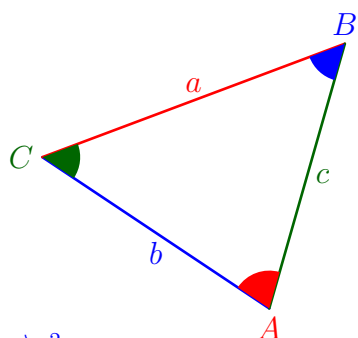
■ PROPRIÉTÉ :

Soit ABC un triangle quelconque. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Alors

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

Démonstration. On considère un triangle ABC quelconque.

Par commodité, on pose : $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On va utiliser les notations avec les sommets pour la preuve.

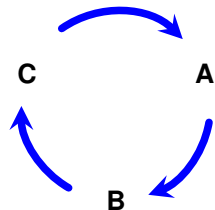


$$\begin{aligned} BC^2 &= \|\vec{BC}\|^2 \\ &= \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2 \\ &= \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} \\ &= AC^2 + AB^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos(\hat{A}) \end{aligned}$$

En réécrivant cette relation avec les notations de commodité, on obtient une formule plus facile à mémoriser. $\square$

Remarque : On peut observer que cette formule généralise l'égalité de Pythagore à un triangle quelconque. C'est pourquoi cette formule se nomme aussi : **Théorème de Pythagore généralisé**.

Aucun côté ne jouant de rôle particulier par rapport aux deux autres, on obtient par **permutation circulaire** :



$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\hat{B})$$

2. Al-Kashi (Kachan 1380 – Samarcande 1429) était mathématicien et astronome perse.

Parmi ses travaux figure la formule exposée ici, ainsi que le calcul de 16 décimales exactes de π .

et

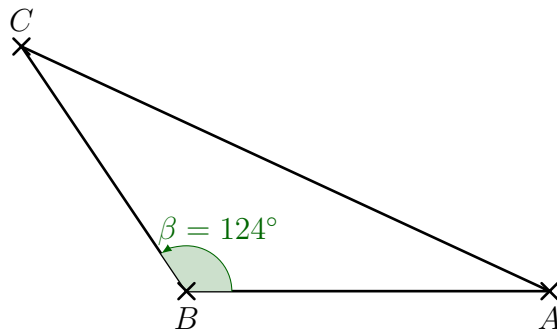
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C})$$

Exemple :

Dans le triangle ABC ci-dessous :

$$AB = 10 \text{ cm et } BC = 7,5 \text{ cm.}$$

Calculer la longueur AC arrondie au millimètre.



Dans le triangle ABC , on applique le théorème d'Al-Kashi :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} AC^2 &= 10^2 + 7,5^2 - 2 \times 10 \times 7,5 \times \cos(124^\circ) \\ &= 156,25 - 150 \cos(124^\circ) \end{aligned}$$

Ainsi

$$AC = \sqrt{156,25 - 150 \cos(124^\circ)}$$

On obtient, grâce à la calculatrice :

$$AC \approx 15,5 \text{ cm}$$

Remarque : Le théorème d'Al-Kashi est parfois appelé **loi des cosinus**.

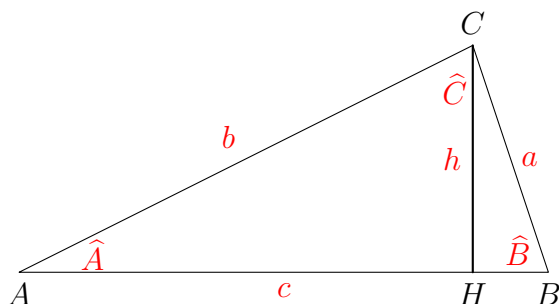
B. Loi des sinus

■ PROPRIÉTÉ :

Soit ABC un triangle quelconque. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On note S son aire. Alors

$$\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$$

Démonstration. On reprend les notations précédentes et on note S l'aire du triangle ABC et H le projeté orthogonal du point B sur le segment $[AC]$.



On a alors :

$$S = \frac{1}{2}AC \times BH$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}AC \times AB \times \sin(\hat{A}) & \text{si } H \in [AC] \\ \frac{1}{2}AC \times AB \times \sin(\pi - \hat{A}) & \text{si } H \notin [AC] \end{cases}$$

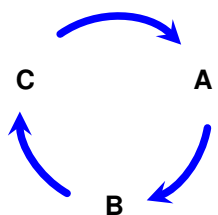
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \sin(\pi - x)$. Ainsi, avec les notations adoptées :

$$S = \frac{1}{2}bc \sin(\hat{A})$$

Par permutation circulaire, on obtient de même :

$$S = \frac{1}{2}ca \sin(\hat{B})$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin(\hat{C})$$



En multipliant chaque membre des égalités par $\frac{2}{abc}$, on obtient :

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

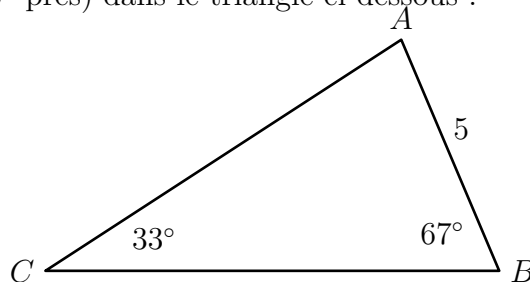
Par inversion, on en conclut

$$\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$$

□

Exemple :

Calculer une valeur approchée de BC (arrondie à 10^2 près) dans le triangle ci-dessous :



Commençons par remarquer que

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - 67^\circ - 33^\circ = 80^\circ$$

Dans le triangle ABC , la formule des sinus nous donne :

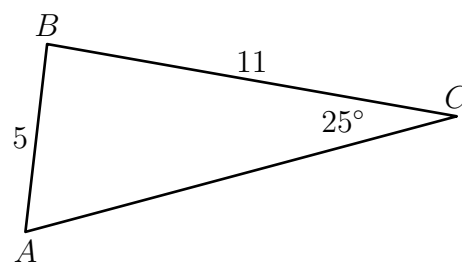
$$\frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{BCA})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})}$$

$$\text{c'est-à-dire } \frac{BC}{\sin(80^\circ)} = \frac{5}{\sin(33^\circ)} = \frac{AC}{\sin(67^\circ)}$$

$$\text{Donc } BC = \frac{5 \sin(80^\circ)}{\sin(67^\circ)}, \text{ c'est-à-dire } BC \approx 5,34.$$

Exemple :

Déterminer la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{BAC}$ dans le triangle ci-dessous :



La loi des sinus dans le triangle ABC donne

$$\frac{AB}{\sin(\widehat{ACB})} = \frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})}$$

$$\text{c'est-à-dire } \frac{5}{\sin(25^\circ)} = \frac{11}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})}$$

$$\text{donc } \sin(\widehat{BAC}) = \frac{11 \sin(25^\circ)}{5}$$

$$\text{On en conclut que } \widehat{BAC} = \arcsin\left(\frac{11 \sin(25^\circ)}{5}\right)$$

ou encore, grâce à la calculatrice, $\widehat{BAC} \approx 68,40^\circ$

C. Théorème de la médiane

Remarque : Il existe plusieurs théorèmes de la médiane. Celui que nous énonçons ici (et qu'il faut connaître) est en fait le **premier théorème de la médiane**, dû à Apollonius³.

■ THÉORÈME : Apollonius

Soient ABC un triangle quelconque et AI la médiane issue de A . On a alors la relation suivante :

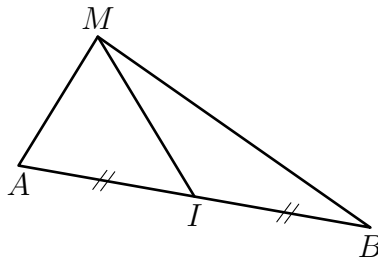
$$AB^2 + AC^2 = 2BI^2 + 2AI^2$$

ou encore

$$AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$$

Démonstration. On considère un triangle MAB quelconque et on appelle I le milieu du segment $[AB]$.

On se propose de calculer la longueur MI en fonction de la longueur des côtés du triangle MAB . Pour cela, utilisons les propriétés du produit scalaire :



$$\begin{aligned} MI^2 &= \overrightarrow{MI}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}) \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2) + \frac{1}{2} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2) + \frac{1}{2} (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MI^2 &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{0}) - \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IA}) \\ &\quad \text{car } I \text{ est le milieu du segment } [AB] \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2) + \frac{1}{2} (\overrightarrow{MI}^2 - IA^2) \\ &= \frac{1}{4} (MA^2 + MB^2) + \frac{1}{2} \left(MI^2 - \left(\frac{1}{2}AB \right)^2 \right) \end{aligned}$$

On en déduit : $4MI^2 = MA^2 + MB^2 + 2MI^2 - \frac{1}{2}AB^2$
et enfin : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$. □

Exemple :

ABC est un triangle avec $AB = 4, AC = 6$
et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On note I le milieu du segment $[BC]$.

Montrer que $AI = \sqrt{19}$.

D'après le théorème de la médiane :

$$AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$$

c'est-à-dire

$$4^2 + 6^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$$

On détermine BC grâce au théorème d'Al-Kashi :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\ &= 16 + 36 - 48 \times \frac{1}{2} \\ &= 28 \end{aligned}$$

D'où

$$52 = \frac{1}{2} \times 28 + 2AI^2$$

c'est-à-dire

$$38 = 2AI^2$$

ou encore $AI^2 = 19$

AI est une longueur, donc AI est positif.

$$\text{Ainsi } AI = \sqrt{19}$$

3. Apollonius de Perge (262 av J.-C. – 190 av J.-C.) est un géomètre et astronome grec, surnommé par ses contemporains le Grand Géomètre.

4. Compléments de trigonométrie

A. Rappels et compléments sur les angles orientés

■ **PROPRIÉTÉ** : Relation de Chasles pour les angles orientés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls :

$$(\vec{u}; \vec{w}) + (\vec{w}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})[2\pi]$$

■ **COROLLAIRE** :

1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls :

$$(\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v})[2\pi]$$

2. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls :

$$(\vec{u}; \vec{v}) + \pi = (\vec{u}; -\vec{v})[2\pi]$$

3. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls :

$$(-\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})[2\pi]$$

Démonstration.

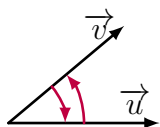
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls :

1.

$$(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{u}) = (\vec{u}; \vec{u}) = 0[2\pi]$$

et donc

$$(\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v})[2\pi]$$

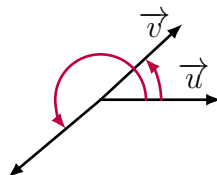
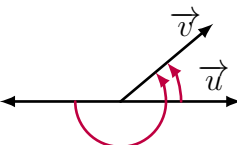


2.

$$(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; -\vec{v}) = (\vec{u}; -\vec{v})[2\pi]$$

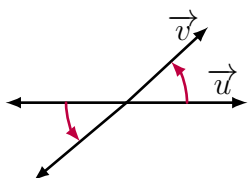
et donc :

$$(\vec{u}; \vec{v}) + \pi = (\vec{u}; -\vec{v})[2\pi]$$



3. Enfin

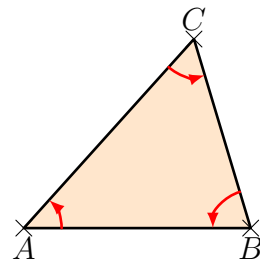
$$\begin{aligned} (-\vec{u}; -\vec{v}) &= (-\vec{u}; \vec{u}) + (\vec{u}; -\vec{v}) \\ &= \pi + (\vec{u}; -\vec{v}) \\ &= \pi + (\vec{u}; \vec{v}) + \pi \\ &= (\vec{u}; \vec{v})[2\pi] \end{aligned}$$



□

Exemple :

Les points A , B et C étant deux à deux distincts, calculer, modulo 2π :



$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$$

$$= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})[2\pi]$$

$$= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (-\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CB}) + (-\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{BA})[2\pi]$$

$$= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CB}) + \pi + (-\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{BA})[2\pi]$$

$$= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CB}) + \pi + (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{BA}) + \pi[2\pi]$$

$$= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BA}) + 2\pi[2\pi]$$

$$= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BA})[2\pi]$$

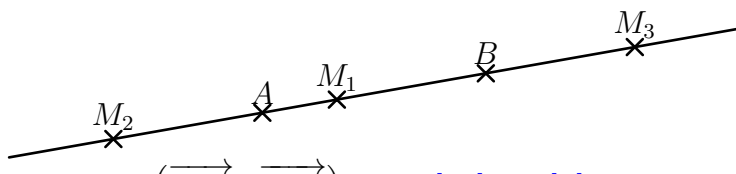
$$= \pi[2\pi]$$

■ **PROPRIÉTÉ** :

Les points A , M et B distincts deux à deux sont alignés si et seulement si

$$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0[2\pi] \text{ ou } (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi[2\pi]$$

$$\text{ou encore } (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0[\pi]$$



$$(\overrightarrow{M_1A}; \overrightarrow{M_1B}) = -\pi[2\pi] = 0[\pi]$$

$$(\overrightarrow{M_2A}; \overrightarrow{M_2B}) = 0[2\pi] = 0[\pi]$$

$$(\overrightarrow{M_3A}; \overrightarrow{M_3B}) = 0[2\pi] = 0[\pi]$$

■ **PROPRIÉTÉ** :

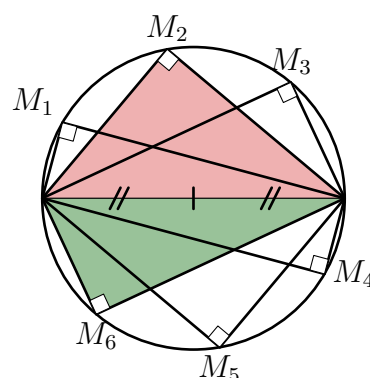
$$M \in \mathcal{C}([AB]) \setminus \{A; B\} \iff (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$(\overrightarrow{M_2A}; \overrightarrow{M_2B}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{M_6A}; \overrightarrow{M_6B}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc, globalement :

$$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$



B. Rappels de trigonométrie

■ DÉFINITION :

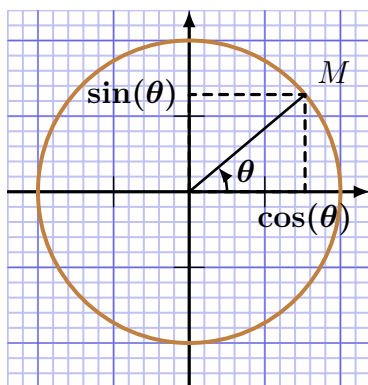
θ étant un réel quelconque, on lui associe l'**unique point M du cercle trigonométrique** tel que

$$(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = \theta[2\pi]$$

■ PROPRIÉTÉ :

$$\overrightarrow{OM} = (\cos \theta) \vec{i} + (\sin \theta) \vec{j}$$

c'est-à-dire que $(\cos \theta; \sin \theta)$ sont les coordonnées dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du point M associé à θ sur le cercle trigonométrique.



■ PROPRIÉTÉ :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin \theta \leq 1$$

■ PROPRIÉTÉ :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

■ PROPRIÉTÉ : périodicité de la fonction cosinus

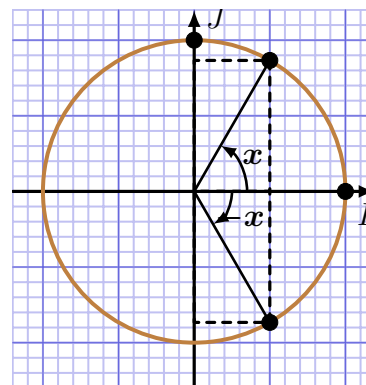
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \cos(\theta + 2k\pi) = \cos \theta$$

■ PROPRIÉTÉ : périodicité de la fonction sinus

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \sin(\theta + 2k\pi) = \sin \theta$$

Les formules suivantes ne sont pas à apprendre par cœur mais il faut savoir les retrouver rapidement par représentation mentale, voire graphique, du cercle trigonométrique :

Angles associés

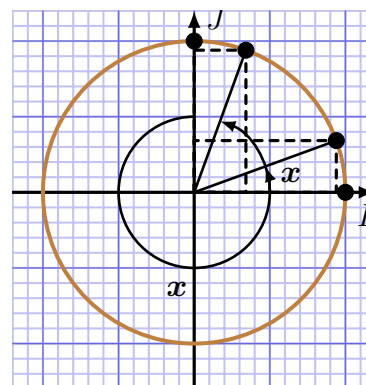


(angles opposés)

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

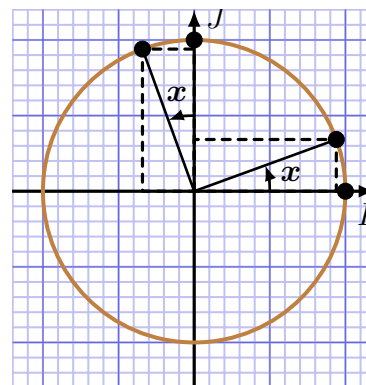
La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.



(angles complémentaires)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

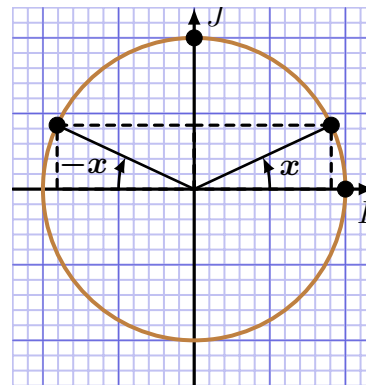
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$



(angles anticomplémentaires)

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

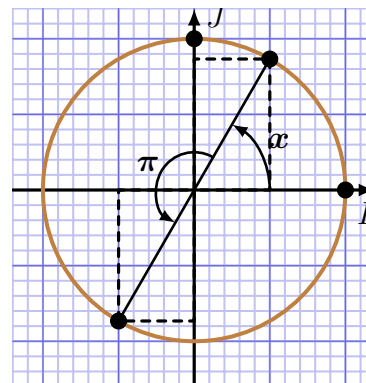
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$



(angles supplémentaires)

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$



(angles antisupplémentaires)

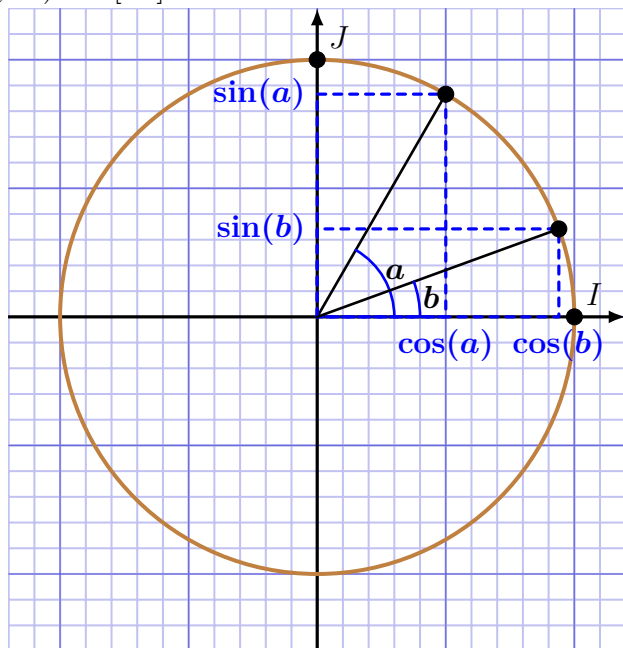
$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x$$

C. Formules d'additions

On considère un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soient a et b deux réels tels que : $(\vec{i}; \vec{u}) = b[2\pi]$ et $(\vec{i}; \vec{v}) = a[2\pi]$.



Ainsi, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont $(\cos b; \sin b)$ et celles du vecteur $\vec{v}$ sont : $(\cos a; \sin a)$.

On retiendra :

■ THÉORÈME :

Pour tous réels a et b :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Démonstration. • Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux manières différentes et en déduire l'expression de $\cos(a - b)$ en fonction de $\cos a, \cos b, \sin a$ et $\sin b$.

- Déduire de la formule précédente l'expression de $\cos(a + b)$ en fonction de $\cos a, \cos b, \sin a$ et $\sin b$.
- En utilisant le fait que

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$$

en déduire l'expression de $\sin(a + b)$ en fonction de $\cos a, \cos b, \sin a$ et $\sin b$.

- En déduire l'expression de $\sin(a - b)$ en fonction de $\cos a, \cos b, \sin a$ et $\sin b$.

□

Exemple :

En remarquant que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, calculer :

• $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

• $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

• $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \\ &= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{4} \\ &= 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

D. Formules de duplication et de linéarisation

■ PROPRIÉTÉ : Formules de duplication

Pour tout réel a ,

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2 \cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Démonstration. Soit a un nombre réel.

- En écrivant que $\cos 2a = \cos(a + a)$, exprimer $\cos 2a$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$, puis seulement en fonction de $\cos a$, puis seulement en fonction de $\sin a$.
- En déduire l'expression de $\cos^2 a$ et de $\sin^2 a$ en fonction de $\cos 2a$.
- Calculer $\sin 2a$ en utilisant le développement de

$$\sin(a + a)$$

□

■ PROPRIÉTÉ : Formules de linéarisation

Pour tout réel a ,

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

Démonstration. En exercice, ce sont des conséquences de la propriété précédente. □

Exemple :

Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$.

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{4} &= \cos \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) \\ &= 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) - 1 \end{aligned}$$

Or, $\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire

$$\cos^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right)$$

ou encore

$$\cos^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

Or, $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, donc $\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) > 0$, et ainsi

$$\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Exemple :

Calculer $\sin \frac{\pi}{8}$.

$$\begin{aligned} \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) &= \frac{1 - \cos \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right)}{2} \\ &= \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{4} \right)}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Or, $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, donc $\sin \left(\frac{\pi}{8} \right) > 0$, et ainsi

$$\sin \left(\frac{\pi}{8} \right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

E. Équations trigonométriques

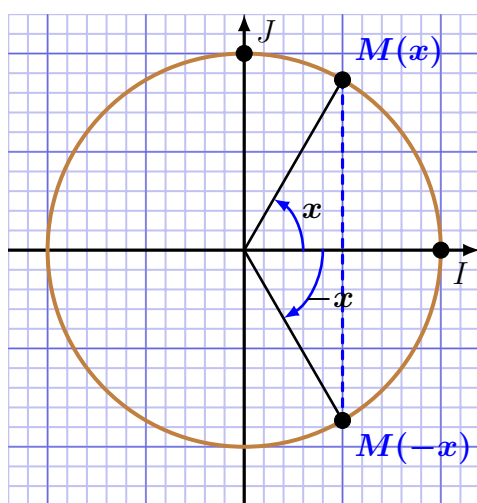
Toutes les équations trigonométriques abordées en 1ère SMP se ramènent à une des équations élémentaires qui suivent :

a. L'équation $\cos x = \cos y$

■ PROPRIÉTÉ :

Pour tout réel x , notons $M(x)$ le point associé au réel x sur le cercle trigonométrique. Alors

$$\begin{aligned} \cos y &= \cos x \\ \text{si et seulement si} \\ M(y) &= M(x) \text{ ou } M(y) = M(-x) . \end{aligned}$$



$\cos y = \cos x$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$y = x + 2k\pi \text{ ou } y = -x + 2k\pi$$

Exemples :

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$, puis préciser les solutions contenues dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$:

a) $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$

$$\cos y = \cos \frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et

$$\mathcal{S}_{]-\pi ; \pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} \right\}$$

b) $\cos 3y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \cos 3x = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\iff 3x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{ou } 3x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi$$

$$\text{ou } x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi, -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et

$$\mathcal{S}_{]-\pi ; \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{4} ; \frac{11\pi}{12} ; -\frac{5\pi}{12} ; -\frac{\pi}{4} ; -\frac{11\pi}{12} ; \frac{5\pi}{12} \right\}$$

c) $\cos 3x = \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$

$$\cos 3x = \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$\iff 3x = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$$

$$\text{ou } 3x = -\frac{\pi}{4} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff 4x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{ou } 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{2}k\pi$$

$$\text{ou } x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{16} + \frac{1}{2}k\pi, -\frac{\pi}{8} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et

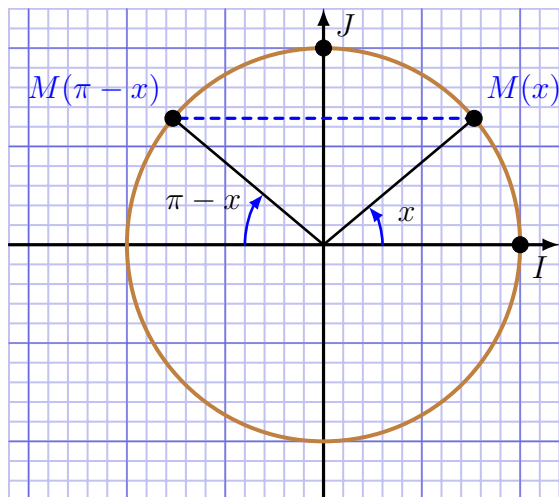
$$\mathcal{S}_{]-\pi ; \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{16} ; \frac{9\pi}{16} ; -\frac{7\pi}{16} ; -\frac{15\pi}{16} ; -\frac{\pi}{8} ; \frac{7\pi}{8} \right\}$$

b. L'équation $\sin x = \sin y$

■ PROPRIÉTÉ :

Pour tout réel x , notons $M(x)$ le point associé au réel x sur le cercle trigonométrique. Alors :

$$\begin{aligned} \sin y &= \sin x \\ \text{si et seulement si} \\ M(y) &= M(x) \text{ ou } M(y) = M(\pi - x) \end{aligned}$$



$\sin y = \sin x$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$y = x + 2k\pi \text{ ou } y = \pi - x + 2k\pi$$

Exemples :

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$, puis préciser les solutions contenues dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$:

a) $\sin y = \sin \frac{\pi}{5}$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{5} \iff x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$$

$$\text{ou } x = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$$

$$\text{ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{5} + 2k\pi, \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et

$$\mathcal{S}_{]-\pi; \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{5}; \frac{4\pi}{5} \right\}$$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right)$$

$$\iff x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{ou } x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et

$$\mathcal{S}_{]-\pi; \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}$$

c) $\sin 4x = \sin \left(\frac{\pi}{5} - 3x \right)$

$$\sin 4x = \sin \left(\frac{\pi}{5} - 3x \right)$$

$$\iff 4x = \frac{\pi}{5} - 3x + 2k\pi$$

$$\text{ou } 4x = \pi - \left(\frac{\pi}{5} - 3x \right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff 7x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$$

$$\text{ou } 4x = \frac{4\pi}{5} + 3x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{35} + \frac{2}{7}k\pi$$

$$\text{ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{35} + \frac{2}{7}k\pi, \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et

$$\mathcal{S}_{]-\pi; \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{35}; \frac{-9\pi}{35}; \frac{-19\pi}{35}; \frac{-29\pi}{35}; \right.$$

$$\left. \frac{11\pi}{35}; \frac{3\pi}{5}; \frac{31\pi}{35}; \frac{4\pi}{5} \right\}$$