

Solution de l'exercice 24

Posons $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ et pour tout x dans un voisinage de a (sauf éventuellement en a), supposons $f(x) \leq g(x)$. Alors : $f(x) - g(x) \leq 0$ (*).

On va prouver que $\ell \leq \ell'$ en raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell > \ell'$ et en montrant que l'on aboutit alors à une contradiction.

Supposons $\ell > \ell'$. On sait que, si f a pour limite ℓ et g a pour limite ℓ' , alors $f - g$ a pour limite $\ell - \ell'$, qui est donc strictement positif. Notons $L = \ell - \ell'$. Ainsi $L > 0$.

Par définition de la limite :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$0 < |x - a| < \eta \implies |(f(x) - g(x)) - L| < \varepsilon$$

Alors

$$-\varepsilon < (f(x) - g(x)) - L < \varepsilon$$

et donc

$$L - \varepsilon < f(x) - g(x) < L + \varepsilon$$

En particulier, pour $\varepsilon = \frac{L}{2}$, on a

$$\frac{L}{2} < f(x) - g(x) < \frac{3L}{2}$$

Comme $L > 0$, on obtient $0 < f(x) - g(x)$, ce qui contredit (*).

On en conclut que l'hypothèse $\ell > \ell'$ est fausse, et donc que si $f(x) \geq g(x)$, alors nécessairement

$$\ell \leq \ell'$$