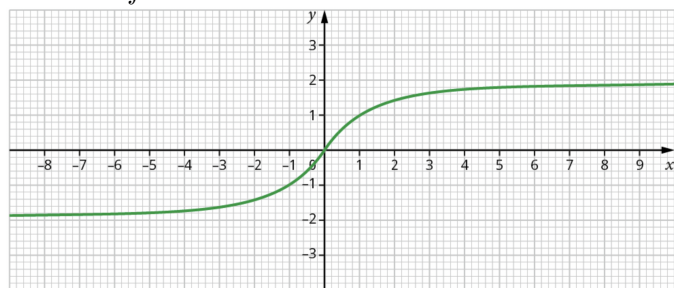


Séquence V – Limites – notion d'asymptotes

Exercice V.1

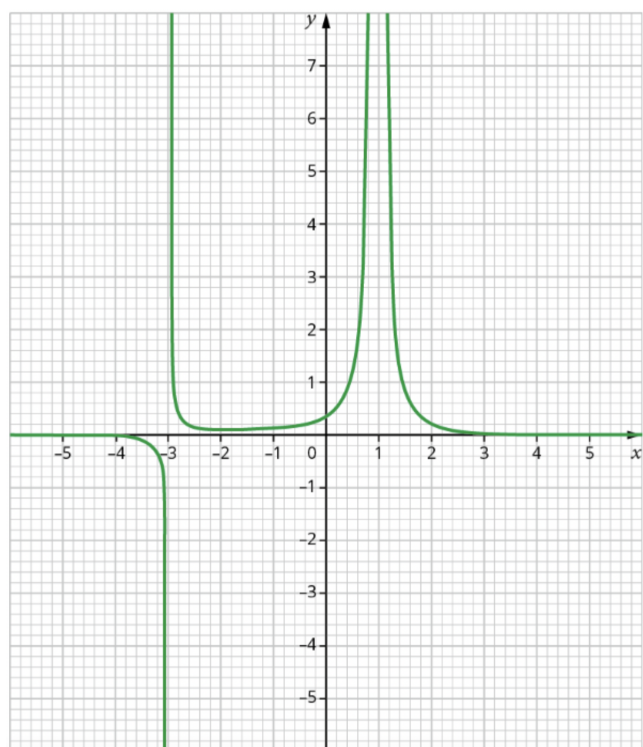
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Lire graphiquement les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction.
2. Par lecture graphique, dresser le tableau complet des variations de f .
3. La courbe de la fonction f possède-t-elle une ou des asymptotes? Le cas échéant, préciser une équation de l'asymptote.

Exercice V.2

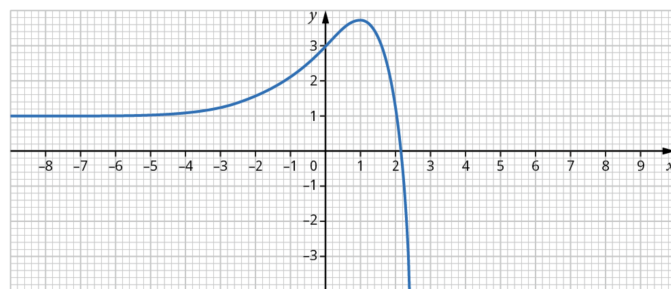
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-\infty; -3[\cup]-3; 1[\cup]1; +\infty[$.



1. Lire graphiquement les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction.
2. Par lecture graphique, dresser le tableau complet des variations de f .
3. La courbe de la fonction possède-t-elle une ou des asymptotes? Le cas échéant, préciser une équation de l'asymptote.

Exercice V.3

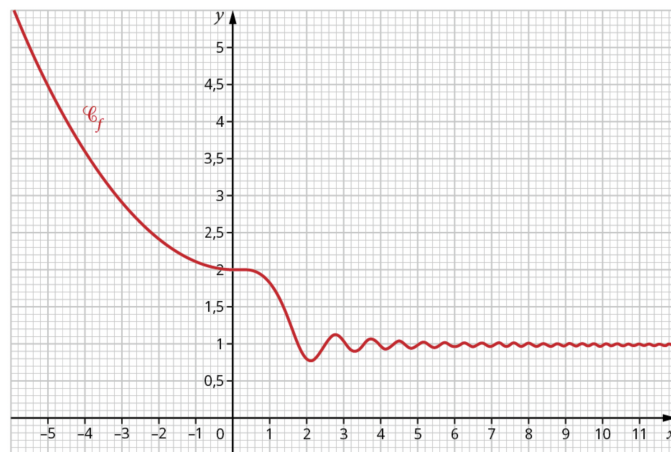
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.



1. Lire graphiquement les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction.
2. Par lecture graphique, dresser le tableau complet des variations de g .
3. La courbe de la fonction g possède-t-elle une ou des asymptotes? Le cas échéant, préciser une équation de l'asymptote.

Exercice V.4

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Lire graphiquement les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction.
2. La courbe de la fonction f possède-t-elle une ou des asymptotes? Le cas échéant, préciser une équation de l'asymptote.

Exercice V.5

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la limite donnée permet d'en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f . Le cas échéant, préciser une équation de l'asymptote.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 10$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$
4. $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = 5$
5. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Exercice V.6

Montrer que la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $f(x) = \frac{5x+1}{x-4}$ admet deux asymptotes dont on précisera l'équation.

Exercice V.7

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe de la fonction f admet-elle une ou des asymptotes? Le cas échéant, préciser une équation de l'asymptote.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	6	1	$+\infty$

Exercice V.8

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f .

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	7

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction.
2. La courbe de la fonction f admet-elle une ou des asymptotes? Le cas échéant, préciser une équation de l'asymptote.
3. Proposer une représentation graphique possible de la fonction f .

Exercice V.9

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f .

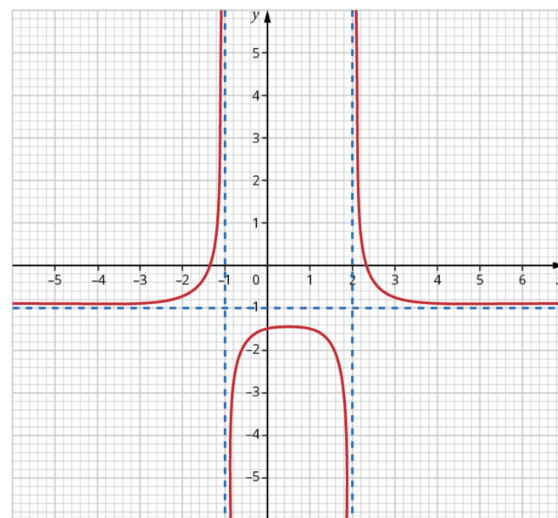
x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$	5

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction.
2. La courbe de la fonction f admet-elle des asymptotes parallèles aux axes de coordonnées? Justifier.
3. (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{f(x)}$
(b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - 5}$

Exercice V.10

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur

$$]-\infty; -1[\cup]-1; 2[\cup]2; +\infty[$$



On a tracé en pointillés les asymptotes à la courbe. Déterminer graphiquement les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
2. $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$
3. $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x) + 5}$
5. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(f(x))$

Séquence V – Limites – calculs de limites

Exercice V.11

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en α . On admettra que la fonction f est définie au voisinage de α .

1. $f(x) = 3x^3 + 2x - 9$ en $\alpha = -\infty$ puis en $\alpha = +\infty$
2. $f(x) = -8x^4 - 3x^2 + 1$ en $\alpha = -\infty$ puis en $\alpha = +\infty$
3. $f(x) = -7x^2 + 5x + 3$ en $\alpha = -\infty$
4. $f(x) = -2x^5 - 6x^3 + 11$ en $\alpha = -\infty$
5. $f(x) = \left(3 + \frac{1}{x}\right) \left(2 - \frac{4}{x^2}\right)$ en $\alpha = -\infty$ puis en $\alpha = +\infty$
6. $f(x) = \frac{3}{4x-2}$ en $\alpha = -\infty$ puis en $\alpha = +\infty$
7. $f(x) = \frac{1}{x+6\sqrt{x}}$ en $\alpha = +\infty$

Exercice V.12

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en α . Si besoin, on distinguera la limite par valeurs inférieures et la limite par valeurs supérieures.

On admettra que la fonction f est définie au voisinage de α .

1. $f(x) = 3x - 5 - \frac{6}{x}$ en $\alpha = 0$
2. $f(x) = \left(6 + \frac{4}{x^2}\right) (x^4 - 2)$ en $\alpha = 0$
3. $f(x) = \frac{x^2}{10-5x}$ en $\alpha = 2$
4. $f(x) = \frac{3-2x}{4-x}$ en $\alpha = 4$
5. $f(x) = \frac{5x-1}{x+3}$ en $\alpha = -3$
6. $f(x) = \frac{4}{x^2+2x-3}$ en $\alpha = 1$
7. $f(x) = \frac{6x-1}{(x-5)^2}$ en $\alpha = 5$

Exercice V.13

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en α . On admettra que la fonction f est définie au voisinage de α .

1. $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ en $\alpha = -\infty$ et en $\alpha = +\infty$
2. $f(x) = -5x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ en $\alpha = -\infty$ et en $\alpha = +\infty$
3. $f(x) = 9x^2 - 4x - \frac{2}{x}$ en $\alpha = -\infty$ et en $\alpha = +\infty$
4. $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 5}$ en $\alpha = -\infty$ et en $\alpha = +\infty$
5. $f(x) = \frac{-4x + 1}{3x^2 + x + 2}$ en $\alpha = -\infty$ et en $\alpha = +\infty$
6. $f(x) = \frac{x^4 + 2x + 1}{4x - 7}$ en $\alpha = -\infty$ et en $\alpha = +\infty$

Exercice V.14

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en α . On admettra que la fonction f est définie au voisinage de α .

1. $f(x) = (-5x + 3)^4$ en $\alpha = -\infty$ et $\alpha = +\infty$
2. $f(x) = (2 - x^3)^3$ en $\alpha = -\infty$ et $\alpha = +\infty$
3. $f(x) = \sqrt{2 + \frac{1}{x}}$ en $\alpha = 0$ par valeurs supérieures et en $\alpha = +\infty$
4. $f(x) = \sin\left(1 + \frac{x^3 + 1}{42x^3}\right)$ en $\alpha = -\infty$

Exercice V.15

On considère une fonction f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ par une expression de la forme

$$f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$$

avec a , b et c des réels que l'on cherche à déterminer.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et que $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$.

Enfin, la courbe représentative de la fonction f passe par le point de coordonnées $(4; 7)$.

Déterminer les valeurs des réels a , b et c .

Exercice V.16

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$f(x) \geq x^2 + 2x - 4$$

Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice V.17

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout réel $x \leq 0$, on a

$$f(x) \leq 3x - 2 - \frac{1}{x}$$

Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

Exercice V.18

On considère la fonction f définie sur $[3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x}$. On cherche à déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ de deux manières différentes.

- (a) Montrer que, pour tout réel x strictement supérieur à 3, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}} \times \frac{x-3}{x}$
(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- (a) Montrer que, pour tout réel x strictement supérieur à 3, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$
(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice V.19

- Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$-\frac{1003}{x^3} \leq \frac{1003 \cos(x)}{x^3} \leq \frac{1003}{x^3}$$

- En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1003 \cos(x)}{x^3}$

Exercice V.20

Dans chacun des cas suivants, déterminer des exemples de fonctions f et g vérifiant les conditions données.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f + g)(x) = +\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = 2$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f}{g}(x) = 0$$

Exercice V.21

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x$$

Exercice V.22

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - x}{2x + \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{E(x)}{x} \right)$$

où $E(x)$ est la *partie entière* de x .

Exercice V.23

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x|x|$$

est-elle dérivable en 0 ?

- Même question avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x-2}{|x|+1}$$

Exercice V.24

Un théorème du cours affirme que, pour $a \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de a ,

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ et si, au voisinage de a : $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\ell \leq \ell'$$

Démontrer ce théorème (on pourra procéder par l'absurde).

