

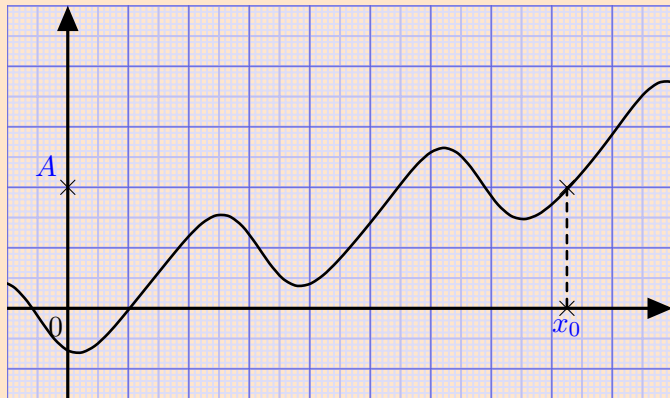
Comportement asymptotique

de fonctions

1. Limite d'une fonction aux infinis

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $]x_0; +\infty[$, $x_0 \in \mathbb{R}$.



On dit que $f(x)$ **tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$** si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Reformulation : $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A$$

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Remarque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ n'implique pas que la fonction f est croissante.

Exemple :

En utilisant la définition, montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$$

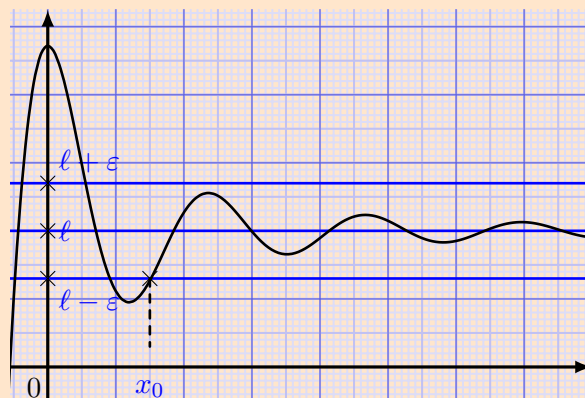
Soit $A > 0$. On cherche x_0 tel que, pour tout $x \geq x_0$, $2x - 1 \geq A$. Or

$$\begin{aligned} 2x - 1 \geq A &\Leftrightarrow 2x \geq A + 1 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{A + 1}{2} \end{aligned}$$

Donc si $x_0 = \frac{A + 1}{2}$: pour tout $x \geq x_0$, $f(x) \geq A$.
Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$.

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $]x_0; +\infty[$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et ℓ un nombre réel.



On dit que $f(x)$ **tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$** si tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x soit assez grand.

Reformulation : $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, x \geq x_0 \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

Reformulation : $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

Exemple :

Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq x_0$, $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon$. On remarque qu'ici x est nécessairement positif. Or,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon \text{ L'inégalité de gauche}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Posons donc $x_0 = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Alors, pour tout $x \geq x_0$, $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \right| < \varepsilon$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0$

Remarque : pour bien comprendre la définition, il faut avoir en tête que $|f(x) - \ell|$ est la distance entre $f(x)$ et ℓ . Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ signifie que la distance entre n'importe quelle valeur de $f(x)$ et ℓ est aussi petite que l'on veut (i.e. inférieure à tout $\varepsilon > 0$) à partir du moment où x est assez grand (c'est-à-dire supérieur à un certain x_0 dépendant de ε).

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit que $f(x)$ **tend vers** $-\infty$ **quand** x **tend vers** $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = +\infty$.

■ DÉFINITION :

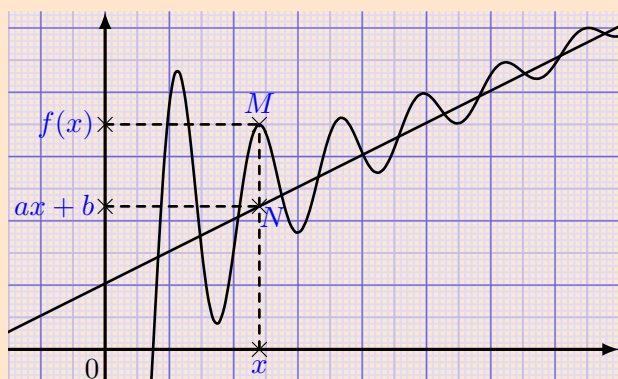
Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$, c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $] -\infty ; x_0[$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et ℓ un nombre réel.

- On dit que $f(x)$ **tend vers** $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si :
 $\forall A > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A$
- On dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ quand x tend vers $-\infty$ si :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R},$
 $\forall x \in \mathcal{D}_f, x \leq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$
- On dit que $f(x)$ **tend vers** $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-f(x)) = +\infty$.

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La droite (d) d'équation $y = ax + b$ est dite **asymptote (oblique)** à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$



Remarque :

- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\iff \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - (ax + b)| = 0$$

$$\iff \lim_{x \rightarrow +\infty} MN(x) = 0$$
- Une asymptote (oblique) à $(\mathcal{C}_f)$ peut couper la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
- Si $a = 0$ l'asymptote est dite **horizontale**.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 3}$$

À l'aide de la calculatrice, conjecturer l'existence d'une asymptote (d) à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$. Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite (d) au voisinage de $+\infty$.

On conjecture que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$.

- On a

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \frac{2x + 1}{x + 3} - 2 \\ &= \frac{2x + 1 - 2x - 6}{x + 3} \\ &= \frac{-5}{x + 3} \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geq x_0$, $\frac{-5}{x + 3} < \varepsilon$. On s'intéresse à la limite en $+\infty$, donc on peut choisir $x > 0$.

Or

$$\begin{aligned} \frac{-5}{x + 3} < \varepsilon &\iff -5 < \varepsilon(x + 3) \\ &\iff -5 < \varepsilon x + 3\varepsilon \\ &\iff x > \frac{-5 - 3\varepsilon}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Ainsi, si $x_0 = \frac{-(5 + 3\varepsilon)}{\varepsilon}$, alors pour $x > x_0$,

$$\frac{-5}{x + 3} < \varepsilon$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2) = 0$$

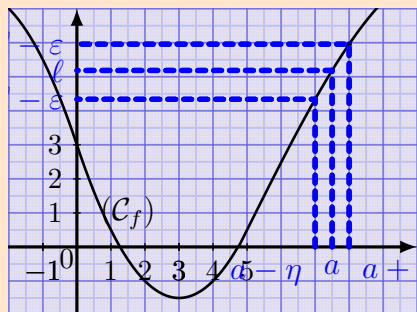
Donc la droite d'équation $y = 2$ est bien une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

- De plus, $x + 3$ étant positif (car x est au voisinage de $+\infty$), $f(x) - 2 < 0$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est sous la droite d'équation $y = 2$ au voisinage de $+\infty$.

2. Limite d'une fonction en $a \in \mathbb{R}$

■ DÉFINITION :

Soient a et ℓ deux nombres réels et soit f une fonction telle que son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ contienne au moins un ensemble du type $]a - h; a + h[\setminus \{a\}$, où $h > 0$.



On dit que **la limite de $f(x)$ quand x tend vers a est ℓ** si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ pour x soit assez proche de a et dans $\mathcal{D}_f$.

Reformulation : La limite de $f(x)$ quand x tend vers a est ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f,$$

$$x \in]a - \eta; a + \eta[\Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

Reformulation : La limite de $f(x)$ en a est ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f,$$

$$|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Exemple : Cas d'une fonction définie en a

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x + 2$$

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$.

On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} |f(x) - 5| &= |3x - 3| \\ &= 3|x - 1| \end{aligned}$$

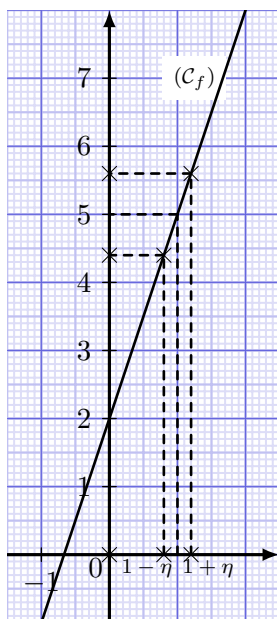
Soit $\varepsilon > 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} |f(x) - 5| &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow 3|x - 1| &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow |x - 1| &< \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Donc, si on choisit $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$ alors : pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$|x - 1| < \eta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$$

On a ainsi démontré que : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$.

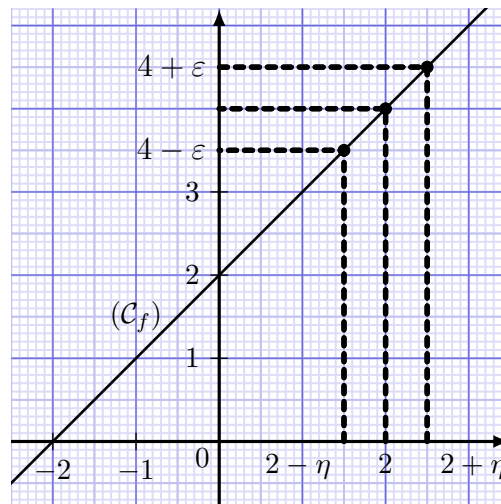


Exemple : Cas d'une fonction non définie en a

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$



On a pour tout réel $x \neq 2$:

$$\begin{aligned} |f(x) - 4| &= \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| \\ &= |x + 2 - 4| \\ &= |x - 2| \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$|f(x) - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \varepsilon$$

Donc, si on choisit $\eta = \varepsilon$, alors, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$|x - 2| < \eta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$$

Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - 2| < \eta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$$

On a ainsi démontré que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

■ PROPRIÉTÉ :

Si la fonction f est définie en a et admet pour limite ℓ en a , alors : $\ell = f(a)$.

Démonstration. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, alors par définition : $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Si f est définie en a , alors, $a \in \mathcal{D}_f$. De plus, pour tout $\eta > 0$, $|a - a| < \eta$ est vraie. Donc on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, |f(a) - \ell| < \varepsilon$$

Ceci signifie que $f(a) = \ell$ (on peut s'en convaincre en envisageant la contraposée de cette assertion). $\square$

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Les fonctions polynômes, rationnelles, racine carrée, valeur absolue, cosinus, sinus et tangente admettent une limite en toute valeur de leur domaine de définition.

Si f est une de ces fonctions et si $a \in \mathcal{D}_f$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Ainsi, dans de nombreux cas, il n'est pas nécessaire de revenir à la définition pour un calcul de limite en a .

Exemple :

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 3x + 2) = (-2)^2 - 3 \times (-2) + 2 = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x - 3x^2 + 9}{1 - 4x^2} \right) = \frac{5 \times 1 - 3 \times 1^2 + 9}{1 - 4 \times 1^2} = -\frac{11}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (3 \cos x) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{2}$$

Exemple : Cas d'une fonction définie en a mais sans limite en a

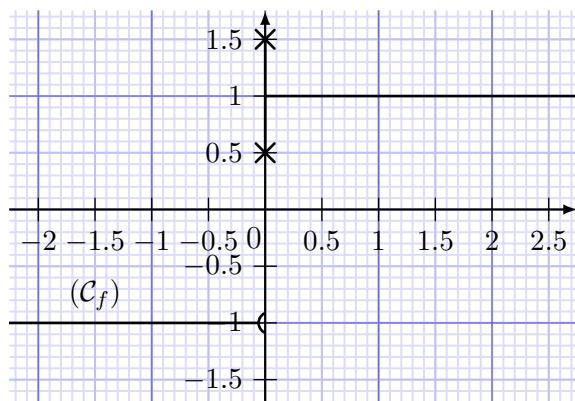
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On peut remarquer que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

D'après la proposition précédente, puisque f est définie en 0, si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$, alors $\ell = f(0) = 1$.



Or, si on avait $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, alors par définition, en choisissant par exemple $\varepsilon = 0,5$ on aurait : $\exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - 0| < \eta \Rightarrow |f(x) - 1| < 0,5$ donc on aurait qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$x \in \mathcal{D}_f \text{ et } |x| < \eta \Rightarrow 0,5 < f(x) < 1,5$$

Mais il est clair que cette assertion est fausse pour tout $x < 0$. En effet :

$\forall \eta > 0 : x < 0 \Rightarrow f(x) = -1$ et donc la double inégalité $0,5 < f(x) < 1,5$ n'est pas vérifiée.

Ici, la fonction f n'a pas de limite en 0.

Cependant, tout intervalle ouvert contenant 1 contient tous les $f(x)$ pour $x > 0$ (et x assez proche de 0) : on dit que $f(x)$ admet 1 comme limite à droite en 0 et on note : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$.

De même : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$

■ DÉFINITION :

Soient a et ℓ deux nombres réels et soit f une fonction telle que son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ contienne au moins un ensemble du type $]a; a + h[$, où $h > 0$.

On dit que **la limite à droite de $f(x)$ quand x tend vers a est ℓ** si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ pour x dans $\mathcal{D}_f$ en étant strictement supérieur à a et assez proche de a .

Reformulation : La limite à droite de $f(x)$ quand x tend vers a est ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, \\ x \in]a; a + \eta[\Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

Reformulation : La limite à droite de $f(x)$ quand x tend vers a est ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, \\ a < x < a + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$.

■ DÉFINITION :

On a une définition analogue pour **la limite à gauche de $f(x)$ au point a est ℓ** , noté : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$

■ PROPRIÉTÉ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Rightarrow \left(\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell \right).$$

De plus, si la fonction f est définie en a , on vu qu'alors : $\ell = f(a)$.

Démonstration. Remarquons que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ alors tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ pour x soit dans $\mathcal{D}_f$ et assez proche de a , donc en particulier si x est strictement supérieur à a : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell$. De même, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell$. $\square$

■ PROPRIÉTÉ :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ alors $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell$.

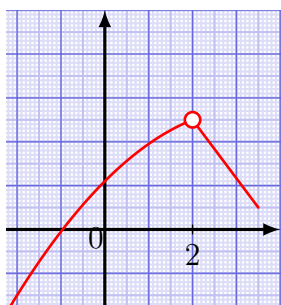
Si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell$ et si la fonction f n'est pas définie en a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell$ et si la fonction f est définie en a avec $f(a) = \ell$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell = f(a)$$

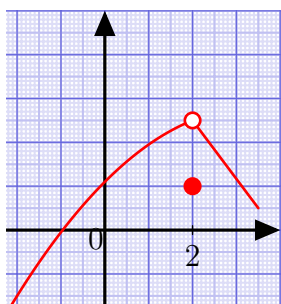
Démonstration. Si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell$ alors tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ pour x dans $\mathcal{D}_f$, strictement supérieur ou strictement inférieur à a et assez proche de a . Donc tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les $f(x)$ pour x dans $\mathcal{D}_f$, et assez proche de a , mais différent de a avec trois possibilités pour $x = a$:

— si la fonction f n'est pas définie en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.



— si la fonction f est définie en a et que $\ell = f(a)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell = f(a)$.

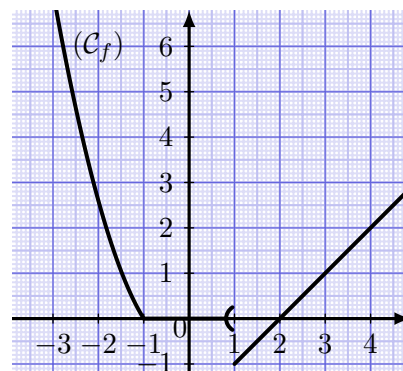
— si la fonction f est définie en a et que $\ell \neq f(a)$ alors la fonction f n'a pas de limite en a .



Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



Remarquons déjà que sur l'intervalle $] -\infty ; -1[$, la fonction f coïncide avec une fonction polynôme, donc elle admet une limite en tout $a \in] -\infty ; -1[$ et cette limite est $f(a)$.

De même, la restriction de la fonction f aux intervalles $] -1 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$ est une fonction polynôme, donc elle admet en tout a de $] -1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ une limite qui est $f(a)$.

De plus :

On peut affirmer pour la même raison que f admet une limite à gauche en -1 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x^2 - 1) = 0$$

Sur l'intervalle $] -1 ; 1[$, la fonction f coïncide avec la fonction g définie par : $g(x) = 0$.

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x) = 0$. On a donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = f(-1) = 0$$

et donc, d'après la proposition précédente,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

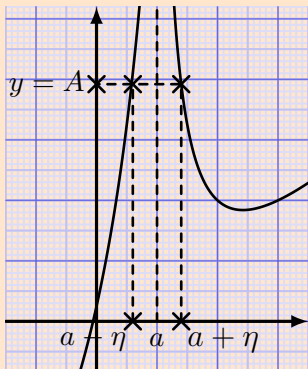
Enfin : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = 0$ et sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$, la fonction f coïncide avec la fonction h définie par : $h(x) = x - 2$ donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} h(x) = h(1) = -1$$

Ainsi : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$ donc la fonction f n'a pas de limite en 1. $\square$

■ DÉFINITION :

Soit a un nombre réel et soit f une fonction telle que son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ contienne au moins un ensemble du type $]a - h; a + h[\setminus \{a\}$, où $h > 0$. On dit que $f(x)$ **tend vers $+\infty$ quand x tend vers a** si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient tous les $f(x)$ pour x soit assez proche de a et dans $\mathcal{D}_f$.



Reformulation : La limite de $f(x)$ quand x tend vers a est $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, \\ x \in]a - \eta; a + \eta[\Rightarrow f(x) > A$$

Reformulation : La limite de $f(x)$ quand x tend vers a est $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

On note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}$$

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$.

Soit $A > 0$. On résout l'inéquation $f(x) > A$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) > A &\Leftrightarrow \frac{1}{(x - 2)^2} > A \\ &\Leftrightarrow 0 < (x - 2)^2 < \frac{1}{A} \\ &\Leftrightarrow 0 < |x - 2| < \frac{1}{\sqrt{A}} \end{aligned}$$

Ainsi en posant $\eta = \frac{1}{\sqrt{A}}$ on peut écrire :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - 2| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

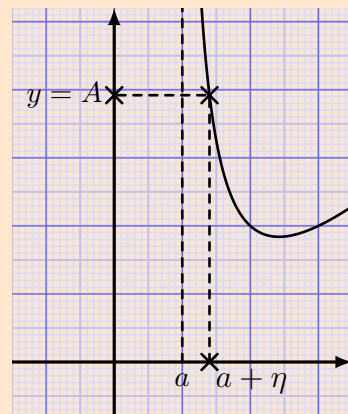
Autrement dit : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$.

■ DÉFINITION :

On définit de manière analogue : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

■ DÉFINITION :

On dit que $f(x)$ **tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures** si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient tous les $f(x)$ pour x dans $\mathcal{D}_f$, strictement supérieur à a et assez proche de a .



Reformulation : La limite à droite de $f(x)$ quand x tend vers a à droite est $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, \\ x \in]a; a + \eta[\Rightarrow f(x) > A$$

Reformulation : La limite à droite de $f(x)$ quand x tend vers a est $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f \\ a < x < a + \eta \Leftrightarrow f(x) > A$$

On note : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$.

■ DÉFINITION :

On définit de même

- $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$

■ DÉFINITION :

Si la limite à droite ou à gauche de f en a est infinie, alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $(\mathcal{C}_f)$.

Reformulation :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$ alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $(\mathcal{C}_f)$.

3. Théorèmes pour le calcul de limites

A. Limites et opérations

En pratique, on utilise rarement les définitions précédentes.

Dans les tableaux ci-dessous, a désigne un nombre réel ou $-\infty$ ou $+\infty$. ℓ et ℓ' sont deux nombres réels.

? signifie qu'on ne peut pas *a priori* donner de résultat : il s'agit d'une **forme indéterminée**; il faudra déterminer la limite, si elle existe, par d'autres techniques.

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^+$ signifie que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ de sorte qu'au voisinage de a (sauf peut-être en a), $g(x) > 0$.

■ PROPRIÉTÉ :

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$			
ℓ	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	??
$-\infty$	$-\infty$	??	$-\infty$

■ PROPRIÉTÉ :

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$					
$\ell > 0$	$\ell \times \ell'$			$+\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$				$-\infty$	$+\infty$
$\ell = 0$				??	
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	??	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$

■ PROPRIÉTÉ :

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' = 0$		$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$						
$\ell > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$		$+\infty$	$-\infty$	0	
$\ell < 0$			$-\infty$	$+\infty$		
$\ell = 0$			$??$			
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$??$	
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$		

Ces théorèmes se démontrent avec les définitions données précédemment : nous les admettons.

Exemple :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x + 1}{5x - 1}$$

- $\lim_{x \rightarrow 2} (4x + 1) = 9$
- $\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 1) = 9$

Donc par quotient de limites, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x + 1}{5x - 1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 3 - \frac{5}{x^2 - 1} \right)$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) = 0^+$

Donc par produit de limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{5}{x^2 - 1} \right) = 0^-$$

Donc par somme de limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 3 - \frac{5}{x^2 - 1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3\sqrt{x} - x)$$

On a une forme indéterminée. On va la lever en factorisant l'expression : pour x au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x} - x &= x \left(\frac{3\sqrt{x}}{x} - 1 \right) \\ &= x \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Par somme et produit de limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} - 1 = -1$$

Donc, par produit de limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3\sqrt{x} - x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right)$$

On sait que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x^2 - 1 = 0^-$. Donc, par inverse de limite,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \left(\frac{2x - 7}{-x^2 + 5x - 6} \right)$$

On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} 2x - 7 = -1 \quad \left| \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} -x^2 + 5x - 6 = 0^+ \right.$$

Ainsi, par inverse, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1}{-x^2 + 5x - 6} = +\infty$. On en conclut, par quotient de limites, que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \left(\frac{2x - 7}{-x^2 + 5x - 6} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x^2 - 7x - 9}{x + 1} \right)$$

On a une forme indéterminée. On factorise pour la lever, en remarquant que -1 est une racine du polynôme $2x^2 - 7x - 9$:

$$2x^2 - 7x - 9 = (x + 1)(2x - 9)$$

On trouve $a = 2$ et $b = -9$. D'où

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x^2 - 7x - 9}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 9) = -11$$

■ **PROPRIÉTÉ** : Cas particulier des fonctions polynômes ou rationnelles

Si $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une famille de $(n + 1)$ nombres réels avec $a_n \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

Si de plus $(b_i)_{0 \leq i \leq m}$ est une famille de $(m + 1)$ nombres réels avec $b_m \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \end{aligned}$$

Exemple :

En utilisant cette proposition, calculer

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (3^{2021} x^4 - 2x + 8x^5) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 8x^5 \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 2x^9}{-3x^4 + 9x^2 - 20} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^9}{-3x^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} x^4 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

B. Limite d'une fonction composée

Dans le théorème suivant, qu'on admettra, a , b et ℓ désignent des nombres réels, ou bien $-\infty$ ou $+\infty$.

■ THÉORÈME :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J , de sorte que pour tout $x \in I$: $f(x) \in J$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et si $\lim_{X \rightarrow b} g(X) = \ell$, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \ell$$

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} 2x = -\pi$ et $\lim_{X \rightarrow -\pi} \sin(X) = 0$. Donc par composition, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \sin(2x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$ et $\lim_{X \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \cos(X) = -\frac{1}{2}$. Par composition, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

Ainsi par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4}$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 4 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

Donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4} = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{\pi x - 1}{4 - 2x}\right)$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi x - 1}{4 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi x}{-2x} = -\frac{\pi}{2}$
et $\lim_{X \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \sin(X) = -1$.

Donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{\pi x - 1}{4 - 2x}\right) = -1$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \sqrt{\frac{x + 2}{x^2 - 1}}$$

On sait que

- $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} x + 2 = 1$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} x^2 - 1 = 0^+$

Ainsi, par quotient de limites, $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = +\infty$

De plus, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$. Donc par composition,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \sqrt{\frac{x + 2}{x^2 - 1}}$$

C. Théorèmes de comparaisons

Pour certains calculs de limites, les théorèmes usuels vus précédemment ne suffisent pas pour conclure.

Par exemple, soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Comme la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$, on ne peut pas utiliser le théorème donnant la limite de $\frac{f}{g}$ connaissant celle de f et celle de g .

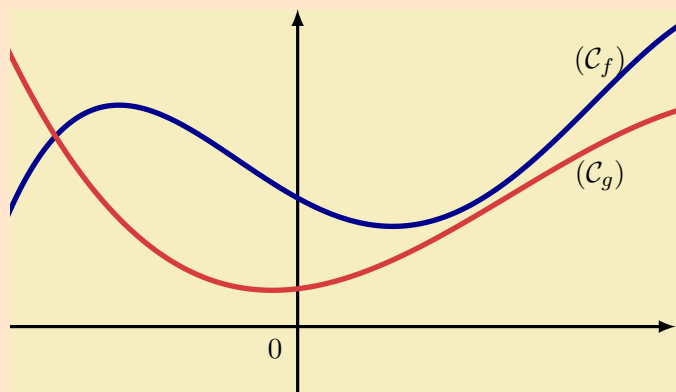
Pour conclure dans certains cas, les théorèmes suivants seront utiles :

■ THÉORÈME :

Dans l'énoncé qui suit, f , g et h désignent trois fonctions, ℓ et ℓ' sont deux réels, α est un réel ou bien $-\infty$ ou $+\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$ et si, pour x au voisinage de α , sauf peut-être en α , $g(x) \leq f(x)$, alors

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$$

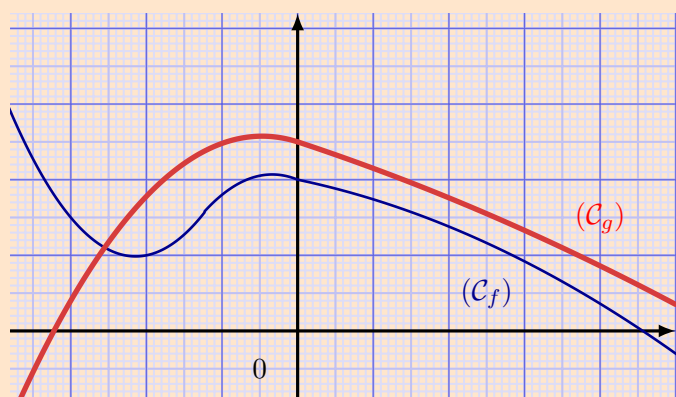


■ THÉORÈME :

Dans l'énoncé qui suit, f , g et h désignent trois fonctions, ℓ et ℓ' sont deux réels, α est un réel ou bien $-\infty$ ou $+\infty$.

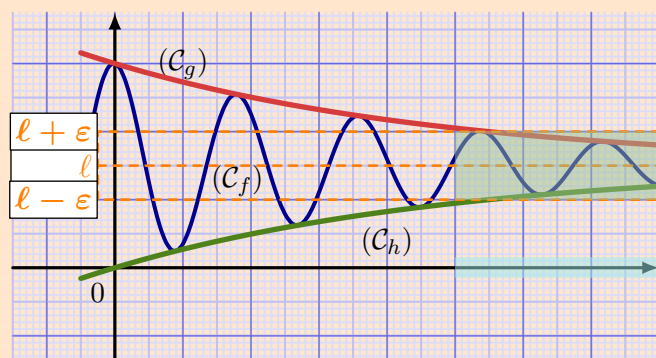
Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = -\infty$ et si, pour x au voisinage de α , sauf peut-être en α , $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$$



■ THÉORÈME : dit des gendarmes (première version)

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = \ell$ et, pour x au voisinage de α , sauf peut-être en α , $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, alors la fonction f admet une limite finie en α et $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$.



■ THÉORÈME : dit des gendarmes (seconde version)

Si au voisinage de α sauf peut-être en α , $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$ alors la fonction f admet une limite finie en α et $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$.

Exemple :

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

Quel que soit x dans un voisinage de $+\infty$,

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

et donc, quel que soit x dans un voisinage de $+\infty$ tel que $x > 0$,

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 0$$

Enfin, le théorème suivant est utile pour majorer ou minorer une limite :

■ THÉORÈME :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ et si, pour x au voisinage de a , $f(x) \leq g(x)$, alors $\ell \leq \ell'$

Démonstration. En exercice. □