

La notion Σ (lire : « sigma »)

L'objet des exercices 1 à 3 est de se familiariser avec la notation Σ incontournable en statistique (mais aussi ailleurs).

Rappelons qu'étant donné des réels $a_1, a_2, \dots, a_n$, leur somme $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ est notée $\sum_{i=1}^n a_i$ (lire : « somme (ou sigma) de i égal 1 jusqu'à n des a_i »).

1 Les trois règles de base

Établir les trois propriétés suivantes pour des réels quelconques :

• Règle 1 (somme) :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i).$$

• Règle 2 (produit par un nombre) :

$$k \times \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) = \sum_{i=1}^n (ka_i).$$

• Règle 3 (sommation de termes constants) :

$$\sum_{i=1}^n a = na.$$

2 Calculs élémentaires

Étant donné des réels $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$, on pose :

$$S = \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad T = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad \text{et} \quad U = \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Exprimer en fonction de S, T et U chacune des sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2; \quad \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n (a_i^2 - b_i^2).$$

3 Quelques exemples

1) Avec les sommes partielles de suites géométriques

Évaluer chacune des sommes suivantes :

$$\sum_{i=0}^{16} 2^i; \quad \sum_{i=0}^9 3^{i+1}; \quad \sum_{i=0}^{10} \frac{3}{2^i}.$$

2) En regardant vers les calculs statistiques

On suppose que $\sum_{i=1}^r f_i = 1$ et l'on pose $m = \sum_{i=1}^r f_i x_i$ (f_i et x_i étant des réels donnés).

Montrer que $\sum_{i=1}^r f_i (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^r f_i x_i^2 - m^2$ et que pour tout réel a :

$$\sum_{i=1}^r f_i (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^r f_i (x_i - a)^2 - (m - a)^2.$$

✎ Écrire $x_i - m = (x_i - a) + (a - m)$.

La notion Σ (lire : « sigma »)

L'objet des exercices 1 à 3 est de se familiariser avec la notation Σ incontournable en statistique (mais aussi ailleurs).

Rappelons qu'étant donné des réels $a_1, a_2, \dots, a_n$, leur somme $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ est notée $\sum_{i=1}^n a_i$ (lire : « somme (ou sigma) de i égal 1 jusqu'à n des a_i »).

1 Les trois règles de base

Établir les trois propriétés suivantes pour des réels quelconques :

• Règle 1 (somme) :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i).$$

• Règle 2 (produit par un nombre) :

$$k \times \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) = \sum_{i=1}^n (ka_i).$$

• Règle 3 (sommation de termes constants) :

$$\sum_{i=1}^n a = na.$$

2 Calculs élémentaires

Étant donné des réels $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$, on pose :

$$S = \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad T = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad \text{et} \quad U = \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Exprimer en fonction de S, T et U chacune des sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2; \quad \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n (a_i^2 - b_i^2).$$

3 Quelques exemples

1) Avec les sommes partielles de suites géométriques

Évaluer chacune des sommes suivantes :

$$\sum_{i=0}^{16} 2^i; \quad \sum_{i=0}^9 3^{i+1}; \quad \sum_{i=0}^{10} \frac{3}{2^i}.$$

2) En regardant vers les calculs statistiques

On suppose que $\sum_{i=1}^r f_i = 1$ et l'on pose $m = \sum_{i=1}^r f_i x_i$ (f_i et x_i étant des réels donnés).

Montrer que $\sum_{i=1}^r f_i (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^r f_i x_i^2 - m^2$ et que pour tout réel a :

$$\sum_{i=1}^r f_i (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^r f_i (x_i - a)^2 - (m - a)^2.$$

✎ Écrire $x_i - m = (x_i - a) + (a - m)$.