

Séquence III – Suite numériques – généralités



Exercice III.1

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n , par

$$u_n = 2^n - 1$$

Calculer les cinq premiers termes de la suite.



Exercice III.2

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par $u_2 = -3$ et, pour tout entier $n \geq 2$, par $u_{n+1} = u_n^2 - 6$.
Calculer les quatre premiers termes de la suite.



Exercice III.3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n^2 + 1$. Exprimer u_{n+1} , puis u_{n-1} , puis u_{2n} et $u_n + 1$ en fonction de n .



Exercice III.4

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3n+1}{n+1}$$

1. Que vaut u_0 ? Que vaut u_1 ? Que vaut u_{2023} ?
2. Si k est un entier naturel quelconque, que vaut u_{2k+1} ? Retrouver la valeur de u_1 et de u_{2023} grâce à cette expression.



Exercice III.5

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 1} \end{cases}$$

Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .



Exercice III.6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \end{cases}$$

Calculer les quatre premiers termes et conjecturer l'expression de u_n en fonction de n



Exercice III.7

Dans les deux cas suivants, déterminer la valeur de u_5 , puis le troisième terme, puis l'expression de u_{2n+1} en fonction de n :

- a) Pour tout $n \geq 4$, $u_n = 3n - 20$
- b) Pour tout $n \geq 0$, $u_n = \frac{n^2}{2^n}$



Exercice III.8

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n \end{cases}$$

1. Déterminer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2. Conjecturer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n .



Exercice III.9

Une entreprise a 200 salariés en 2019.

Chaque année, 10 % des salariés quittent l'entreprise, et l'entreprise embauche 30 nouveaux salariés. On note (u_n) la suite dont le terme général correspond au nombre de salariés dans l'entreprise en $2019 + n$.

1. Combien y aura-t-il de salariés en 2020 ?
2. Combien y aura-t-il de salariés en 2021 ?
3. Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .



Exercice interactif :



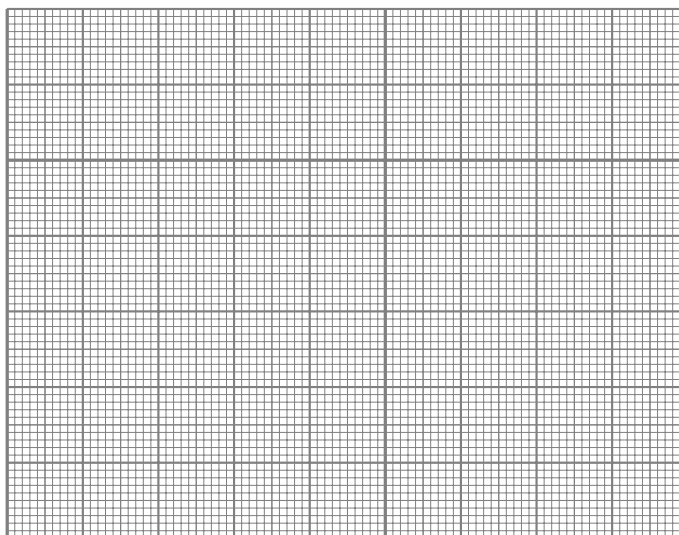
Séquence III – Suite numériques – représentation graphique

Exercice III.10

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}n - 3$$

Représenter graphiquement la suite (u_n) ci-dessous.



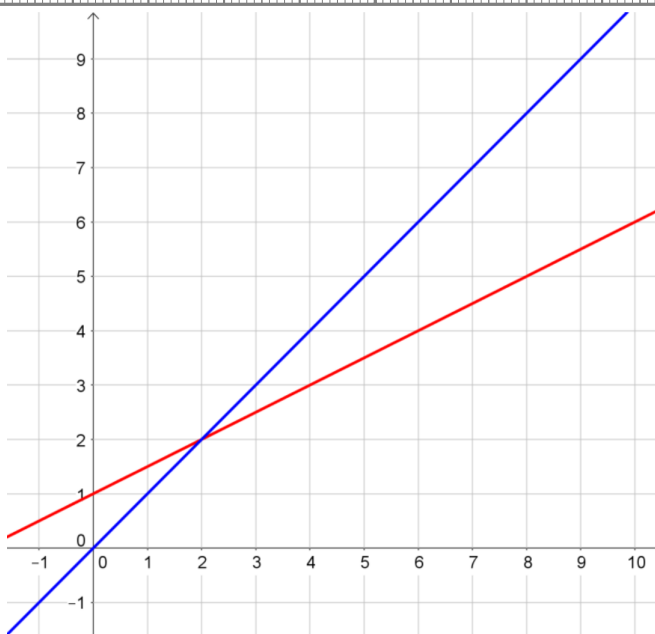
Exercice III.11

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

On a représenté ci-contre la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ainsi que la première bissectrice du plan.

Représenter graphiquement les cinq premiers termes de cette suite.



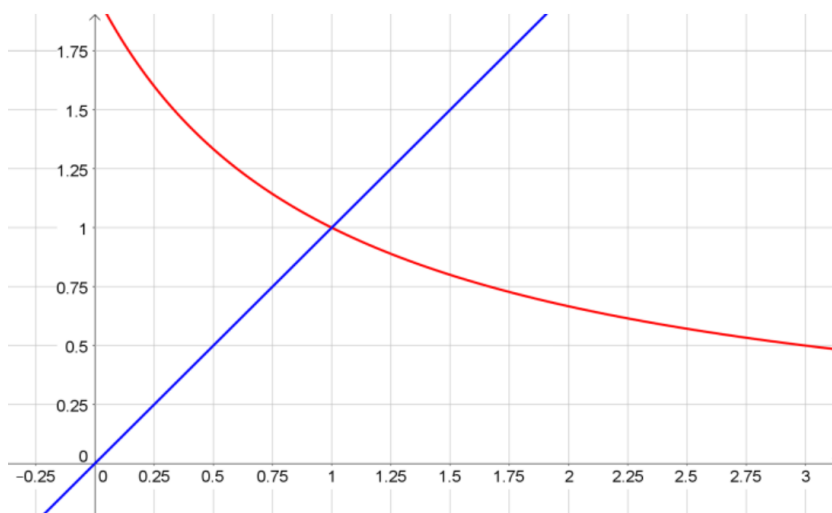
Exercice III.12

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{u_n + 1} \end{cases}$$

On a représenté ci-contre la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ainsi que la première bissectrice du plan.

Représenter graphiquement les cinq premiers termes de cette suite.



Séquence III – Suite numériques – variations



Exercice III.13

Dans chacun des cas, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

1. $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = 3n - 5$ pour $n \in \mathbb{N}$
3. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
4. $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
5. $u_n = \frac{-2}{n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$
6. $u_n = \frac{5^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
7. $u_n = 2n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$
8. $u_n = \frac{3^n}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$



Exercice III.15

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de deux manières.



Exercice interactif :



Exercice III.14

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2}$$

1. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 1$.

Séquence III – Suite numériques – représentation graphique 2

Exercice III.16

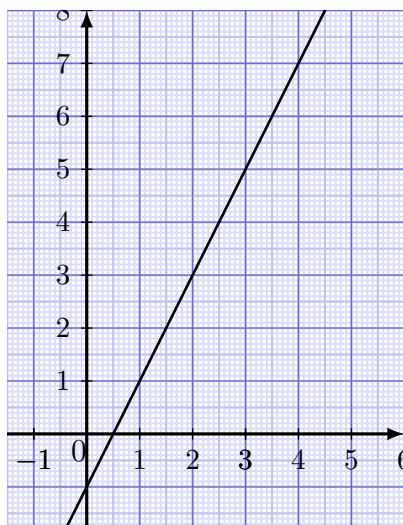
Sur le graphique suivant est représentée graphiquement la fonction

$$f : x \mapsto 2x - 1$$

Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$

En déduire une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que sur sa limite éventuelle.

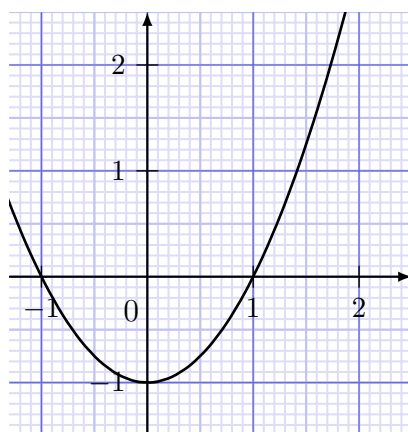


Exercice III.17

Sur le graphique suivant est représentée graphiquement la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$. Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 1 \end{cases}$$

En déduire une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que sur sa limite éventuelle.

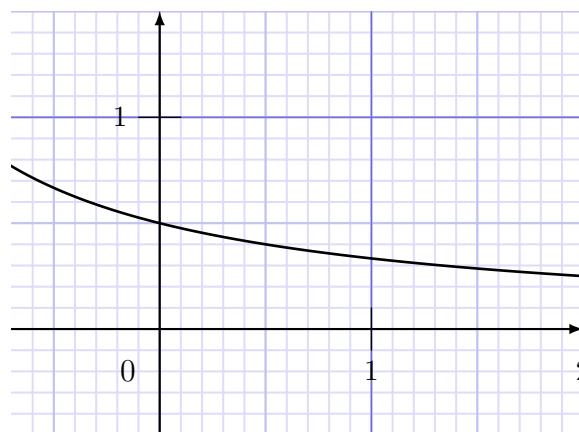


Exercice III.18

Sur le graphique suivant est représentée graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+2}$. Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 2} \end{cases}$$

En déduire une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que sur sa limite éventuelle.



Exercice III.19

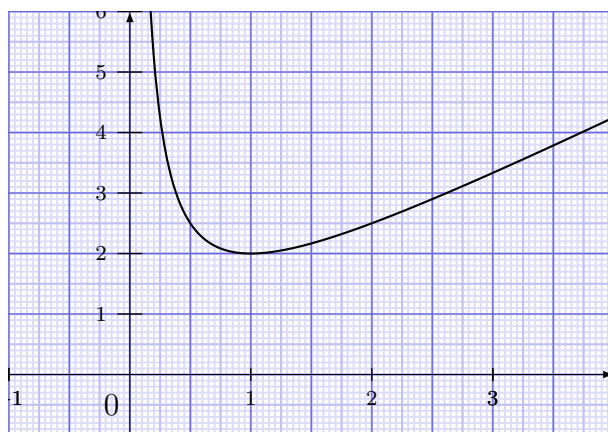
Sur le graphique suivant est représentée graphiquement la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} + x$$

Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + u_n \end{cases}$$

En déduire une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que sur sa limite éventuelle.





Exercice III.20

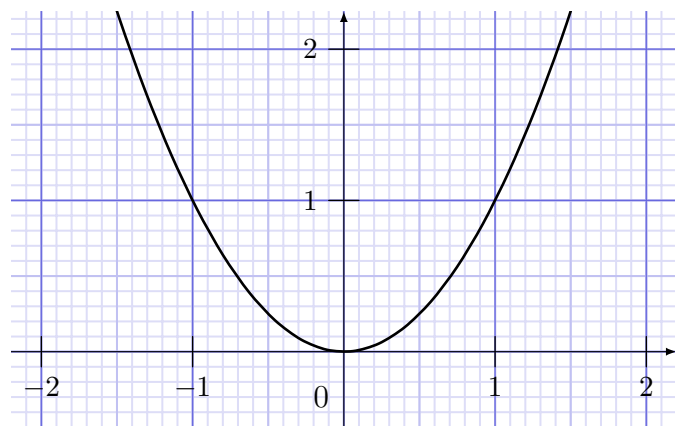
Sur le graphique suivant est représentée graphiquement la fonction

$$f : x \mapsto f(x) = x^2$$

Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite définie par

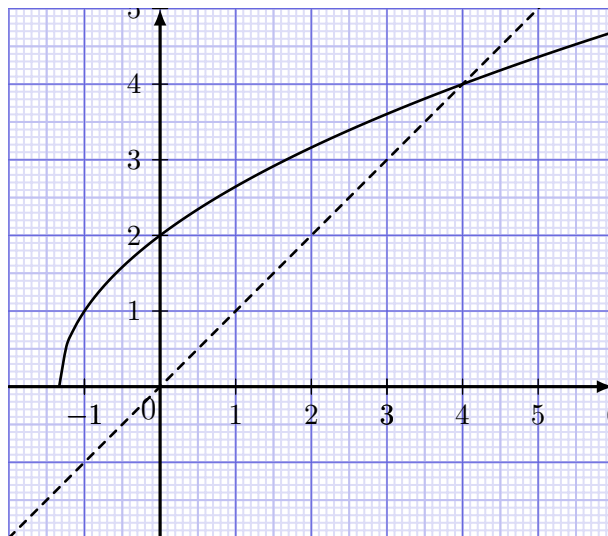
$$\begin{cases} u_0 = -\frac{4}{5} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$$

En déduire une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que sur sa limite éventuelle.



Exercice III.21

La suite (u_n) est définie par : $u_0 > -\frac{4}{3}$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$. La courbe représentative de la fonction f définie sur $[-\frac{4}{3}; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{4 + 3x}$ est donnée ci-dessous, ainsi que la droite (d) d'équation $y = x$.



1. On suppose d'abord que $u_0 = 6$.
 - (a) Conjecturer graphiquement les variations, la minoration et la majoration, ainsi que la limite éventuelle de la suite (u_n) .
 - (b) Démontrer que pour tout entier naturel n : $4 < u_{n+1} < u_n$. Que peut-on en déduire ?
2. (a) Les résultats démontrés à la question 1) b) semblent-ils vrais pour tout $u_0 > 4$?
 - (b) Montrer que si $u_0 > 4$, alors $u_1 < u_0$. Conclure quant à la conjecture de la question a).
3. Que se passe-t-il pour u_0 tel que $-\frac{4}{3} < u_0 < 4$?

Séquence III – Suite numériques – suites arithmétiques



Exercice III.22

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1} \end{cases}$$

On définit ensuite la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?



Exercice III.26

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. (a) Calculer v_0 , v_1 et v_2 .
(b) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.
(c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel n puis celle de u_n .



Exercice III.23

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $u_1 = 5$.

Calculer u_n en fonction de n , puis calculer u_{25} .



Exercice III.27

Soit $S = 7 + 18 + 29 + 40 + \dots + 2\,856$.

Donner la valeur de S .



Exercice III.28

Soit $S = 3 + 8 + 13 + 18 + \dots + 1\,003$.

Donner la valeur de S .



Exercice III.24

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique décroissante définie par :
$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 270 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = 720\,000 \end{cases}$$

1. Déterminer u_0 , u_1 et u_2
2. Soit $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
Déterminer n tel que $S = 450$.



Exercice III.25

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n^2}$$

On admet que la suite (u_n) a tous ses termes positifs.

1. Démontrer que la suite (u_n) n'est pas une suite arithmétique.
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = u_n^2$.
Démontrer que (v_n) est arithmétique. Préciser le premier terme et la raison.
3. Exprimer v_n en fonction de n .
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .



Exercice III.29

On s'intéresse au forage d'un puits. Chaque mètre supplémentaire creusé coûte 30 euros de plus que le mètre précédent.

On appelle u_n le coût en euros du n -ième mètre creusé pour ce forage. On sait que le coût du premier mètre creusé est 250 euros.

1. Que vaut u_1 ? Que vaut u_2 ?
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
Justifier brièvement.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
4. Quel est le coût d'un forage de 30 mètres ?
5. Quelle est la profondeur maximale d'un puits que l'on peut forer avec un budget de 30 000 euros ?



Exercice interactif :



Séquence III – Suite numériques – suites géométriques



Exercice III.30

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 6n - 2n^2 + 1$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle géométrique ?



Exercice III.31

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme

$$u_0 = \frac{2}{5} \text{ et de raison } q = -\frac{1}{2}.$$

Calculer u_n en fonction de n , puis calculer u_{10} .



Exercice III.32

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 9 \end{cases}$$

On définit ensuite la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 18$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle géométrique ?

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle géométrique ?



Exercice III.33

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique décroissante

$$\text{définie par : } \begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 999 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = 729\,000 \end{cases}$$

Déterminer u_0 , u_1 et u_2

2. Soit $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

Déterminer n tel que $S = 999,999$.



Exercice III.34

Soit $S = 5 + 15 + 45 + 135 + \dots + 295\,245$.

Donner la valeur de S .



Exercice III.35

Soit $S = 3 + 6 + 12 + 24 + \dots + 786\,432$. Donner la valeur de S , sachant que $2^{18} = 262\,144$.



Exercice III.36

Sylvain emprunte 1 000 € pendant 1 an. Son remboursement se fait par un versement unique à taux de 6,62 % annuel.

Sylvette emprunte 1 000 € pendant 1 an. Son remboursement se fait par douze versements à taux de 1 % mensuel.

Combien Sylvain doit-il payer pour rembourser son emprunt ? Et combien Sylvette doit-elle payer pour rembourser son emprunt ? Qui va donc dépenser le plus d'argent ?



Exercice III.37

Sylvain dispose d'un capital de 10 000 €, qu'il place dans une banque. Cette banque lui propose un revenu fixe de 110 euros par mois. On appelle u_0 le capital initial de Sylvain, et u_n son capital au bout de n mois.

Sylvette possède aussi un capital de 10 000 €, qu'elle place dans une autre banque. Elle les place à intérêts composés de 1 % par mois. On appelle v_0 le capital initial de Sylvette, et v_n son capital au bout de n mois.

- a) Calculer u_1 et u_2 . Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
b) Calculer v_1 et v_2 . Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- a) Sylvain et Sylvette décident tous les deux de placer leur capital pendant un an. Lequel des deux a fait le meilleur choix ?
b) Sylvain et Sylvette décident tous les deux de placer leur capital pendant deux ans. Lequel des deux a fait le meilleur choix ?
- a) Au bout de combien de mois le capital de Sylvain aura-t-il doublé ?
b) Au bout de combien de mois le capital de Sylvette aura-t-il doublé ?



Exercice interactif :



Séquence III – Suite numériques

Suites arithmético-géométriques

Exercice III.38

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 11 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

1. Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4 .
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - 4$.
Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
3. Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

Exercice III.39

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,5u_n + 0,4 \end{cases}$$

1. Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4 .
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - 0,8$.
Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
3. Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

Exercice III.40

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = au_n + 4$, où a est un nombre réel donné.

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 6$.

1. Déterminer la valeur de a pour que la suite (v_n) soit une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Exprimer v_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (v_n)
3. Dédire de la question précédente l'expression de u_n en fonction de n et la limite de la suite (u_n) .

Exercice III.41

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes début janvier 2013 et a enregistré 2 500 inscriptions pour l'année 2013. Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvellent leur inscription l'année suivante et qu'il y aura également 400 nouveaux adhérents.

1. Modéliser la situation par une suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$
2. Calculer a_1 et a_2 .
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a_n - 2000$.
 - (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8. Préciser son premier terme.
 - (b) Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
 - (c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$
 - (d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \leq 2010$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice III.42

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 1$ et $b \neq 0$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = au_n + b$.

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n + \lambda$, où $\lambda = \frac{-b}{1-a}$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison a .
2. En déduire l'expression du terme général de (v_n) en fonction de n .
3. En conclure l'expression de u_n en fonction de n .

Séquence III – Suite numériques – problèmes avec des suites

Exercice III.43

Le radon 222 est un noyau radioactif produit par la chaîne de désintégration de l'uranium 238. Il se présente sous forme de gaz dans l'atmosphère ; ses produits de désintégration sont des métaux lourds qui peuvent affecter les voies pulmonaires.

Le taux de désintégration journalier du radon 222 est de 16,5 %. Cela signifie que, étant donné N noyaux de radon 222, 16,5 % d'entre eux se désintègrent chaque jour.

Déterminer après combien de jours plus de la moitié des noyaux sera désintégrée. On appelle ce nombre **la demi-vie du radon 222**.

Pour en savoir plus sur les enjeux de la présence du radon 222 dans l'atmosphère,

https :

[//sante.gouv.fr/sante-et-environnement/batiments/article/qu-est-ce-que-le-radon](https://sante.gouv.fr/sante-et-environnement/batiments/article/qu-est-ce-que-le-radon)

Exercice III.44

1. Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$. Montrer que (u_n) est arithmétique si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et u_{n+2} , c'est-à-dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$$

2. Soit (v_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$. Montrer que (v_n) est géométrique si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, (v_n) est la moyenne géométrique entre v_n et v_{n+2} , c'est-à-dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \sqrt{v_n \times v_{n+2}}$$

Exercice III.45

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et dont les premiers termes sont les suivants :

$$1; 1; 2; \frac{1}{2}; 4; \frac{1}{4}$$

- Expliquer la logique de cette suite de nombres et donner les quatre termes qui suivent $\frac{1}{8}$.
- Déterminer, en fonction de l'entier positif n , le terme de rang n de cette suite.
- Déterminer la somme des n premiers termes de cette suite.

Exercice III.46

D'après le cours, nous connaissons la somme des n premiers entiers naturels, soit pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer le terme général de la suite (S_n^2) définie, pour tout $n \geq 1$, par $S_n^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$, c'est-à-dire la somme des carrés des n premiers entiers naturels.

1. Démontrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

On remarquera que cette identité reste valable dans $\mathbb{R}$.

2. Exprimer $(n+1)^3 - n^3$ en fonction de n puis compléter le tableau suivant.

$n = 1$	$2^3 - 1^3$	$=$	$3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$
$n = 2$	$3^3 - 2^3$	$=$	$3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$
$n = 3$	$4^3 - 3^3$	$=$	$3 \times \dots^2 + 3 \times \dots + 1$
$n = 4$	$5^3 - 4^3$	$=$	$3 \times \dots^2 + 3 \times \dots + 1$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$(n+1)^3 - n^3$	$=$	$3 \times \dots^2 + 3 \times \dots + 1$

3. En additionnant tous les termes de la deuxième colonne puis tous ceux de la quatrième colonne, démontrer que, pour tout n ,

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n^2 + 3S_n + n$$

4. En déduire l'expression de

$$S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. Démontrer que la suite définie pour tout $n \geq 1$ par $R_n = \frac{S_n^2}{S_n}$ est arithmétique et préciser son premier terme et sa raison.

6. Exprimer S_n^2 en fonction de S_n pour tout $n \geq 1$.

