

Suites (partie 1)

1. Introduction

■ DÉFINITION : Suite numérique

On appelle **suite numérique** une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow f(n) \end{array}$$

Tout élément de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) a au plus une image dans $\mathbb{R}$.

Remarque : au plus une image signifie soit une image, soit aucune.

Notation :

- La suite f est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou encore (u_n) .
- Le nombre réel $f(n)$ est noté u_n et est le **terme général** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. n est appelé un **indice**.

⚠ Attention

Ce n'est pas nécessairement le n -ième terme de la suite.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n - 3$

Calculer les termes suivants :

- $u_0 = -3$; c'est le **premier** terme de la suite.
- $u_1 = -1$; c'est le **deuxième** terme de la suite.
- $u_2 = 1$; c'est le **troisième** terme de la suite.
- $u_3 = 3$; c'est le **quatrième** terme de la suite.
- $u_{1000} = 1997$; c'est le **1001^e** terme de la suite.

⚠ Attention

En général,

$$u_{n+1} \neq u_n + 1$$

En effet, dans l'exemple précédent,

$$u_{n+1} = 2(n+1) - 3 = 2n + 2 - 3 = 2n - 1$$

$$\text{et } u_n + 1 = (2n - 3) + 1 = 2n - 2$$

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

Calculer les termes suivants :

- $u_1 = u_0 + 3 = 2 + 3 = 5$
- $u_2 = u_1 + 3 = 5 + 3 = 8$
- $u_3 = u_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

On conjecture que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n + 2$

À la calculatrice, pour calculer les premiers termes d'une suite, on peut utiliser l'onglet « Suites » :



Puis on choisit « u_n » pour calculer les termes d'une suite comme dans le premier exemple (on dit alors que l'on a exprimé la suite de manière **explicite**, car on peut écrire $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$) ou « u_{n+1} » pour calculer les termes comme dans le second exemple (on dit alors que l'on a exprimé la suite **par récurrence** car on peut écrire $u_{n+1} = g(u_n)$, où g est une fonction numérique). Une suite peut être définie **à partir d'un certain rang** n_0 .

Exemple :

La suite (u_n) définie de manière explicite par

$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-4}}$ est définie à partir du rang $n = 5$, c'est-à-dire pour $n \in [5; +\infty[\cap \mathbb{N}$.

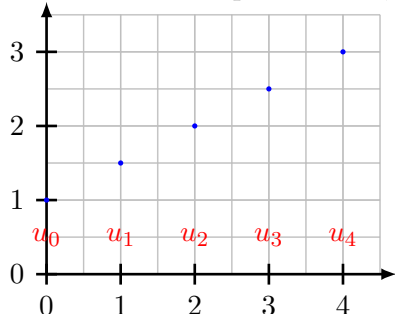
2. Représentation graphique

MÉTHODE : Suites explicites

Si la suite est définie de manière explicite, on place dans le repère les points de coordonnées $(n ; u_n)$.

Exemple :

On considère la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{2} + 1$



MÉTHODE : Suites définies par récurrence

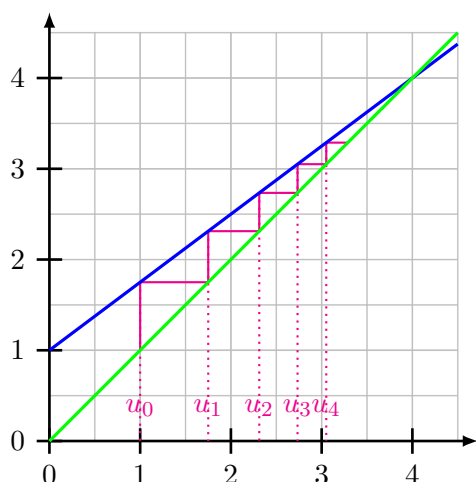
Si la suite est définie par récurrence par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$, on utilise une autre méthode :

1. On trace la représentation graphique de la fonction associée g et la droite d'équation $y = x$. Dans un repère orthonormé, cette droite est appelée **la première bissectrice du plan**.
2. On place le point de coordonnées $(u_0 ; 0)$.
3. On trace la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point précédemment placé.
4. On trace la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point précédemment placé.
5. On place le point d'intersection entre cette droite et la droite d'équation $y = x$.
6. On recommence à partir de l'étape 3.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$



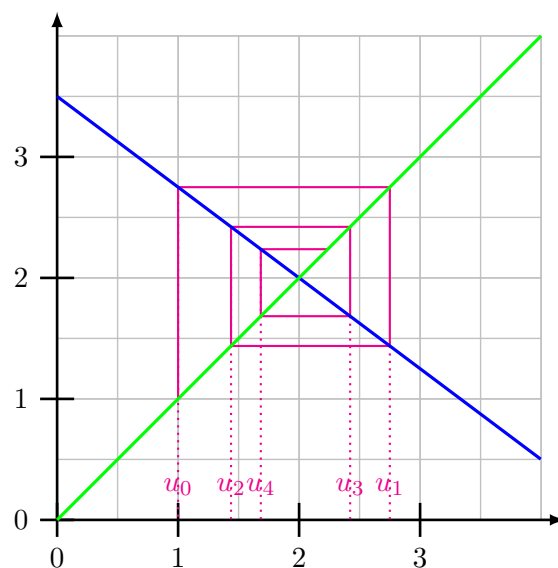
On conjecture que :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante**.
 - $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n < 4$.
 - La suite est convergente vers **4**.
- On écrit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{3}{4}u_n + \frac{7}{2} \end{cases}$$



On conjecture que :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **non monotone**.
 - $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n < 3$.
 - La suite est convergente vers **2**.
- On écrit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

À la calculatrice, pour tracer la représentation graphique d'une suite, on saisit la suite dans la calculatrice (cf. page précédente), puis on clique sur « Tracer le graphique » :

rad

SUITES

Suites

Graphique

Tableau

$$u_{n+1} = -\frac{3}{4}u_n + 7$$

$$u_0 = 1$$

Ajouter une suite

Tracer le graphique

Afficher les valeurs

3. Sens de variation

■ DÉFINITION : Suites croissantes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et N un entier. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** à partir du rang N lorsque, pour tout $n \geq N$:

$$u_n \leq u_{n+1}$$

Remarque : On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement croissante** lorsque l'inégalité est stricte.

■ DÉFINITION : Suites décroissantes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et N un entier. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** à partir du rang N lorsque, pour tout $n \geq N$:

$$u_n \geq u_{n+1}$$

Remarque : On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** lorsque l'inégalité est stricte.

■ DÉFINITION : Suites monotones

On dit que (u_n) est **monotone** à partir du rang N si et seulement si (u_n) est croissante ou si (u_n) décroissante. Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est **non monotone**.

Exemple :

Considérons la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + 1$. Cette suite est **strictement croissante**.

Remarque : Quand une suite est monotone à partir de son premier terme, on ne précise pas le rang N .

Remarque : Une suite strictement monotone est monotone.

Remarque : Une suite n'est pas nécessairement monotone : par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ a tous ses termes consécutifs de signes opposés (on dit que cette suite est **alternée**). Elle n'est ni croissante, ni décroissante.

■ MÉTHODE : Déterminer le sens de variation d'une suite (Cas 1)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie explicitement par $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$. Alors (u_n) a le même sens de variation que f : on peut étudier les variations de la fonction f pour en déduire celles de (u_n) .

Exemple :

Soit (u_n) définie par $u_n = n^2 - 6n + 1$. Montrer que (u_n) est croissante à partir du rang 3.

On a $u_n = (n - 3)^2 - 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, la fonction $f : x \mapsto (x - 3)^2 - 8$ est croissante sur $[3 ; +\infty[$. Pour $n \geq 3$, on a $n + 1 \geq n$ et comme f est croissante sur $[3 ; +\infty[$, on a $f(n + 1) \geq f(n)$, autrement dit $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est donc croissante à partir du rang 3.

■ MÉTHODE : Déterminer le sens de variation d'une suite (Cas 2)

Pour déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$

■ PROPRIÉTÉ :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Remarque : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement croissante** ou **strictement décroissante** dans le cas où les inégalités sont strictes.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 7 \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 7$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = -2n + 7$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -2(n+1) + 7 \\ &= -2n - 2 + 7 \\ &= -2n + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } u_{n+1} - u_n &= -2n + 5 - (-2n + 7) \\ &= -2n + 5 + 2n - 7 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

■ MÉTHODE : Déterminer le sens de variation d'une suite (Cas 3)

Lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement positive, elle est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) si et seulement si : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (respectivement $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$).

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = 5 \times 3^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} = 5 \times 3^{n+1}$.

• Deuxième méthode :

$$\begin{aligned} \text{Donc } u_{n+1} &= 5 \times 3^{n+1} - 5 \times 3^n \\ &= 5 \times 3^n \times 3 - 5 \times 3^n \\ &= 5 \times 3^n \times (3 - 1) \\ &= 5 \times 3^n \times 2 \\ &= 10 \times 3^n \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n > 0$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Ainsi la suite (u_n) est strictement croissante.

- Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive, on peut appliquer la **troisième méthode** :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} = 3$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, et donc

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

4. Qualités d'une suite

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $I = [N ; +\infty[\cap \mathbb{N}$.

■ DÉFINITION : Suite majorée

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite **majorée** par le réel B si et seulement si, pour tout $n \in I$, $u_n \leq B$.

■ DÉFINITION : Suite minorée

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite **minorée** par le réel A si et seulement si, pour tout $n \in I$, $u_n \geq A$.

■ DÉFINITION : Suite bornée

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite **bornée** si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque :

- Une suite croissante est minorée par son premier terme.
- Une suite décroissante est majorée par son premier terme.

■ DÉFINITION : Minorant et majorant

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite minorée par A (resp. majorée par B). Le réel A (resp. B) est appelé **un minorant** (resp. **un majorant**) de la suite (u_n) .

■ PROPRIÉTÉ :

On peut remarquer que les majorants et minorants ne sont pas uniques :

Si B est un majorant, tout réel supérieur à B est aussi un majorant.

Si A est un minorant, tout réel inférieur à A est aussi un minorant.

Exemple :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ est-elle majorée ? minorée ? bornée ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq -\frac{1}{n} < 0$. On en conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 \leq u_n < 2$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par 1 et majorée par 2, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

Exemple :

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \cos(3v_n^2 + 237) + \frac{1}{n} \end{cases}$$

est-elle bornée ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \cos(3v_n^2 + 237) \leq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{n} \leq 1$. On en conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-1 < v_n \leq 2$$

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par -1 et majorée par 2, donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

5. Suites arithmétiques

■ DÉFINITION : Suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique** lorsqu'il existe un réel r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Remarque : On dit alors que les termes sont, dans cet ordre, en **progression arithmétique**.

■ DÉFINITION : Raison

Avec les notations précédentes, r est appelé la **raison de la suite arithmétique**.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = -3n + 5$.

- $u_0 = 5$
- $u_1 = 2$
- $u_2 = -1$
- $u_3 = -4$
- $u_4 = -7$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **semble** être une suite arithmétique de raison -3 . Prouvons-le :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= -3(n+1) - 5 \\ &= -3n - 3 - 5 \\ &= -3n + 5 - 3 \\ &= u_n - 3\end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 3$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -3$.

Exemple :

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_n = \frac{1}{n}$.

On a :

$$\bullet v_1 = 1 \qquad \bullet v_2 = \frac{1}{2} \qquad \bullet v_3 = \frac{1}{3}$$

$$v_1 - v_0 = -\frac{1}{2} \text{ et } v_2 - v_1 = -\frac{1}{6}, \text{ donc}$$

$$v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$$

Donc la suite (v_n) n'est pas une suite arithmétique.

■ MÉTHODE : Déterminer si une suite est ou n'est pas arithmétique

Pour déterminer si une suite est ou n'est pas arithmétique,

- On calcule les premiers termes de la suite
- Si les termes ne sont pas en **progression arithmétique**, alors la suite n'est pas arithmétique.
- Si les termes sont en progression arithmétique, la suite **semble** être arithmétique, et il faut le démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■ PROPRIÉTÉ : Expression du terme général d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4 + 5n$$

Cette suite est la suite arithmétique définie par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$$



Attention

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r . Alors

- $u_2 = u_1 + r$
- $u_3 = u_2 + r = u_1 + r + r = u_1 + 2r$
- $u_4 = u_3 + r = u_1 + 2r + r = u_1 + 3r$

On a ici : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 + (n-1)r$.

■ PROPRIÉTÉ : Expression du terme général d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ un indice et u_p un terme de la suite. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n-p)r$$

Exemple :

Déterminer une formule explicite pour la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_4 = 10$ et $u_8 = 22$.
Soit r la raison de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$u_8 - u_4 = (8 - 4) \times r = 4r.$$

$$\text{Donc, } r = \frac{u_8 - u_4}{4} = \frac{22 - 10}{4} = 3.$$

On a alors $u_4 = u_0 + 4 \times 3$ donc $u_0 = -2$.
Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -2 + 3n$.

La légende du petit Gauß¹

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

On réécrit S_n en inversant l'ordre des termes :

$$S_n = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1.$$

En ajoutant membre à membre ces deux égalités, on obtient

$$2S_n = (n + 1) + (n - 1 + 2) + (n - 2 + 3) + \dots + (1 + n)$$

Chacun des n termes de cette égalité vaut $n + 1$. Donc

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

■ **PROPRIÉTÉ** : Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = (n + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$



Attention

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r .

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = n \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right)$$

Exemple :

Soit $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$. Donner la valeur de S_n .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison 1.

On peut écrire $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$

$$\text{Donc } S_n = n \left(\frac{1 + n}{2} \right)$$

$$\text{Ainsi, } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

$$\text{Application : } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 1000 = \frac{1000 \times 1001}{2} = 500\,500.$$

1. On dit que Carl Friedrich Gauß (1777-1855) a utilisé cette méthode de calcul à l'âge de 9 ans pour obtenir la somme des 100 premiers entiers.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique, de premier terme u_0 et de raison r . Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S = \underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}_{n+1 \text{ termes}}$$

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

$$\begin{aligned} S &= u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_2 + u_1 + u_0 \\ \hline 2S &= (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) \\ &\quad + \dots + (u_{n-2} + u_2) + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 + u_n &= u_0 + (u_0 + nr) \\ &= 2u_0 + nr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 + u_{n-1} &= (u_0 + r) + [u_0 + (n-1)r] \\ &= u_0 + r + u_0 + nr - r \\ &= 2u_0 + nr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 + u_{n-2} &= (u_0 + 2r) + [u_0 + (n-2)r] \\ &= u_0 + 2r + u_0 + nr - 2r \\ &= 2u_0 + nr \end{aligned}$$

On cherche à montrer que, quel que soit $p \in \mathbb{N}$,

$$u_p + u_{n-p} = 2u_0 + nr$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_p + u_{n-p} &= (u_0 + pr) + [u_0 + (n-p)r] \\ &= u_0 + pr + u_0 + nr - pr \\ &= 2u_0 + nr. \end{aligned}$$

Or, $2u_0 + nr = u_0 + u_0 + nr = u_0 + u_n$.

$$\text{Ainsi } 2S = (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \dots + (u_0 + u_n)$$

$$\text{i.e. } 2S = (n+1)(u_0 + u_n)$$

$$\text{i.e. } S = (n+1) \frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

Ainsi,

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

□

6. Suites géométriques

■ DÉFINITION : Suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** lorsque il existe un réel q non nul tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$$

Remarque : On dit alors que les termes sont, dans cet ordre, en **progression géométrique**.

■ DÉFINITION : Raison

Avec les notations précédentes, q est appelé la **raison de la suite géométrique**.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 2 \times 3^n$.

- $u_0 = 2 \times 3^0 = 2 \times 1 = 2$
- $u_1 = 2 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$
- $u_2 = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$
- $u_3 = 2 \times 3^3 = 2 \times 27 = 54$
- $u_4 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **semble** être une suite géométrique de raison 3. Prouvons-le :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= 2 \times 3^{n+1} \\ &= 2 \times (3^n \times 3) \\ &= (2 \times 3^n) \times 3 \\ &= u_n \times 3 \end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times 3$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

Exemple :

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_n = \frac{1}{n}$.

- $v_1 = 1$
- $v_2 = \frac{1}{2}$
- $v_3 = \frac{1}{3}$

Aucun de ces trois nombres n'est nul, donc on peut écrire : $\frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{2}$ et $\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{6}$, donc

$$\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_1}{v_0}$$

Donc la suite (v_n) n'est pas une suite géométrique.

■ MÉTHODE : Déterminer si une suite est ou n'est pas géométrique

Pour déterminer si une suite est ou n'est pas arithmétique,

- On calcule les premiers termes de la suite
- Si les termes ne sont pas en **progression géométrique**, alors la suite n'est pas géométrique.
- Si les termes sont en progression géométrique, la suite **peut** être géométrique, et il faut le démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■ PROPRIÉTÉ : Expression du terme général d'une suite arithmétique

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $q \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Cette suite est la suite géométrique définie par

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2} \end{cases}$$



Attention

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite géométrique de premier terme u_1 et de raison $q \neq 0$. On a :

- $u_2 = u_1 \times q$
- $u_3 = u_2 \times q = u_1 \times q \times q = u_1 \times q^2$
- $u_4 = u_3 \times q = u_1 \times q^2 \times q = u_1 \times q^3$

On a ici : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

■ PROPRIÉTÉ : Expression du terme général d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^*$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ un indice et u_p un terme de la suite.

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple :

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q . On sait que $v_1 = 6$ et $v_4 = 48$.

On a $v_4 = q^4 v_0 = q^3 \times q^1 v_0 = q^3 \times v_1$. Ainsi, $q^3 = \frac{v_4}{v_1} = \frac{48}{6} = 8 = 2^3$. L'exposant 3 est impair,

donc on en déduit que $q = 2$ puis $v_0 = \frac{v_1}{q} = 3$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times q^n = 3 \times 2^n$$

■ **PROPRIÉTÉ** : Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$.

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$



Attention

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite géométrique de premier terme u_1 et de raison $q \neq 1$.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Exemple :

Soit $S = 5 + 15 + 45 + 135 + \dots + 295\,245$. Calculer S .

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite géométrique de premier terme $u_1 = 5$ et de raison $q = 3$.

On cherche n tel que $u_n = 295\,245$.

$$\begin{aligned} u_n = 295\,245 &\iff u_1 \times q^{n-1} = 295\,245 \\ &\iff 5 \times 3^{n-1} = 295\,245 \\ &\iff 3^{n-1} = 59\,049 \end{aligned}$$

On a $n - 1 = 10$ car $3^{10} = 59\,049$. D'où $n = 11$.

$$\text{Enfin, } S = 5 \times \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = 442\,865$$

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique, de premier terme u_0 et de raison q . Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S = \underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}_{n+1 \text{ termes}}$$

- Si $q = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$. Ainsi

$$S = (n + 1) u_0$$

- Si $q \neq 1$, alors

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^{n-1} + u_0 \times q^n \end{aligned}$$

Ainsi

$$qS = u_0 \times q + u_0 \times q^2 + u_0 \times q^3 + \dots + u_0 \times q^n + u_0 \times q^{n+1}$$

Ainsi, on peut dire que :

$$S - qS = u_0 - u_0 \times q^{n+1}$$

c'est-à-dire

$$(1 - q) S = u_0 (1 - q^{n+1})$$

Alors, puisque $q \neq 1$, on obtient

$$S = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Donc, on a $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ $\square$

Exemple :

$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n$. Calculer S .

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n.$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$.

S n'est pas une suite géométrique mais la somme des termes d'une suite géométrique.

La somme des termes de la suite est donnée par

$$S = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S = 1 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

$$S = -1 \times (1 - 2^{n+1})$$

$$S = 2^{n+1} - 1$$

$$\text{Donc } 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = -1 + 2^{n+1}$$

7. Suites arithmético-géométriques

■ DÉFINITION : Suite arithmético-géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe deux réels a et b , avec a non nul, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Exemple :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 4 \end{cases}$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite arithmétique :

Calculons les trois premiers termes de la suite :

$$\begin{aligned} * u_0 &= 1 \\ * u_1 &= -2 \times 1 + 4 = 2 \\ * u_2 &= -2 \times 2 + 4 = 0 \end{aligned}$$

On a $u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$ et $u_2 - u_1 = 0 - 2 = -2$

Donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite arithmétique.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite géométrique :

$$\text{On a } \frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2 \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{0}{2} = 0$$

Donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite géométrique.

■ PROPRIÉTÉ : Suite auxiliaire (démontrée en exercice)

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Ainsi, il existe deux réels a et b , avec $a \neq 1$, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

On considère la suite (v_n) définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + \lambda$ où $\lambda = \frac{-b}{1-a}$.

Alors (v_n) est une suite géométrique de raison a .

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$$

Ici $a = \frac{1}{2}$ et $b = -3$.

On pose ainsi $\lambda = \frac{-b}{1-a} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_n + 6$$

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= u_{n+1} + 6 \\ &= \left(\frac{1}{2}u_n - 3\right) + 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 3 \\ &= \frac{1}{2}(v_n - 6) + 3 \\ &= \frac{1}{2}v_n - 3 + 3 \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 + 6 = 10 + 6 = 16$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

Ainsi $v_n = v_0 \times q^n$, donc $v_n = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a $u_n = v_n - 6$, donc $u_n = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$