

# Calcul de sommes avec $\Sigma$

## 1. Pourquoi le symbole $\Sigma$ ?

En lisant la formule

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 10$$

chacun comprend instantanément de quoi il retourne : pour calculer cette expression, on doit ajouter les entiers naturels de ..... jusqu'à ..... . L'usage des points de suspension ne semble pas constituer, en l'occurrence, un obstacle à la compréhension. Idem pour :

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \cdots + 625$$

On devine « aisément » qu'il s'agit de la somme ---

.....  
Mais dans le cas de :

$$15 + 46 + 23 + 70 + 35 + \cdots + 8$$

on ne voit pas, même après un certain délai de réflexion, ce que cachent les points de suspension. Pourtant, ces nombres n'ont pas été choisis au hasard : ce sont les premiers termes de la suite dite « de Syracuse » pour  $N = 15$  définie par la formule

$$\begin{cases} u_0 = 15 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$$

$$u_0 = \dots\dots\dots$$

$$u_1 = \dots\dots\dots$$

$$u_2 = \dots\dots\dots$$

$$u_3 = \dots\dots\dots$$

$$u_4 = \dots\dots\dots$$

et ainsi de suite... On pourrait donc penser que les points de suspension peuvent être utilisés, à condition qu'il n'existe aucun doute quant à l'identité de la suite sous-jacente. Mais ce n'est pas aussi simple...

Par exemple, si l'on pose pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$t_n = (n-1)(n-2)(n-3) + n$$

Les premiers termes de la suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  sont :

$$t_1 = \dots\dots\dots$$

$$t_2 = \dots\dots\dots$$

$$t_3 = \dots\dots\dots$$

Mais attention :

$$t_4 = \dots\dots\dots$$

Donc, lorsqu'on écrit :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 23$$

pourquoi ne s'agirait-il pas de la somme des 5 premiers termes de la suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  ? Ceci montre la nécessité d'une notation totalement explicite, qui élimine toute ambiguïté.

On abandonne donc les points de suspension et on adopte la notation  $\Sigma$  .

## 2. Le symbole $\Sigma$

Notation :

Soit  $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$  une liste de  $n$  nombres.

On note :

$$\sum_{k=1}^n u_k$$

pour désigner ce qu'on aurait noté jusque-là :

$$u_1 + \cdots + u_n$$

Cette formule se lit :

« somme, pour  $k$  variant de 1 à  $n$ , des  $u_k$  »

ou

« somme des  $u_k$ , pour  $k$  variant de 1 à  $n$  »

### ■ DÉFINITION :

Le symbole  $k$  est appelé l'**indice de sommation**.

**Remarque :** Il est essentiel de comprendre que la somme ne dépend pas de  $k$ . Pour cette raison, ce symbole est qualifié de « muet ». Concrètement, cela signifie qu'on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole... qui ne soit pas déjà utilisé dans le contexte du calcul ! Si  $n$  est un entier naturel et  $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$  est une liste de  $n$  nombres réels,

$$\sum_{i=0}^n u_i = \sum_{k=0}^n u_k$$

### 3. Propriétés

L'ordre des termes est sans importance pour le calcul d'une somme, d'où la propriété suivante :

#### ■ PROPRIÉTÉ :

Si  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$  sont des nombres réels quelconques, alors :

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$$

Exemple :

$$\sum_{k=0}^{10} (2^k + 3^k) = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

Les parenthèses sont recommandées, pour ne pas dire indispensables, pour éviter toute confusion !

Exemple :

$$\sum_{i=1}^3 (i + 1) = (1 + 1) + (2 + 1) + (3 + 1) = 9$$

tandis que, par défaut :  $\sum_{i=1}^3 i + 1$  s'interprète en :

$$\left( \sum_{i=1}^3 i \right) + 1 = 7$$

Mais revenons à la dernière égalité (dans la propriété). Lorsqu'on la parcourt de gauche à droite, on dit qu'on sépare la somme en deux. Et lorsqu'on la parcourt de droite à gauche, on dit qu'on fusionne les deux sommes en une seule. Il est nécessaire, pour la fusion, que les deux ensembles d'indices coïncident.

La formule bien connue de distributivité de la multiplication sur l'addition se généralise ainsi :

#### ■ PROPRIÉTÉ :

Si  $x_1, \dots, x_n$  et  $\lambda$  sont des nombres réels, alors

$$\sum_{i=1}^n (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

Lorsqu'on parcourt cette égalité de gauche à droite, on

dit qu'on met  $\lambda$  en facteur dans la somme. Lorsqu'on la parcourt de droite à gauche, on dit qu'on développe, ou qu'on distribue  $\lambda$  sur la somme.

Et attention à l'erreur classique : pour avoir le droit de factoriser par  $\lambda$ , encore faut-il que ce coefficient  $\lambda$  soit indépendant de l'indice de sommation.

Exemple :

**Première méthode :** par factorisation

$$\sum_{k=0}^4 3^{k+1} = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

**Deuxième méthode :** par réindexation

$$\sum_{k=0}^4 3^{k+1} = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

#### ■ DÉFINITION :

**Changer d'indice** (ou **réindexer**) une somme consiste simplement à en renuméroter les termes.

### Exemple :

La somme  $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$  peut s'écrire :

$$S = \sum_{i=1}^4 x_i$$

mais aussi :

$$S = \sum_{j=0}^3 x_{j+1}$$

ou encore :

$$S = \sum_{k=2}^5 x_{k-1}$$

Pour passer de la première écriture à la seconde, on pose  $j = \dots\dots\dots$  et pour passer de la première à la troisième, on pose  $k = \dots\dots\dots$

## ■ PROPRIÉTÉ :

Soient  $n \geq 1$  et des nombres réels  $t_0, \dots, t_n$ .

Alors :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (t_k - t_{k+1})$$

se simplifie en  $S = t_0 - t_n$ .

*Éléments de preuve :*

Cela se comprend en écrivant explicitement les quelques premiers termes et les quelques derniers (le calcul qui suit suppose  $n \geq 3$ ) :

On voit que les termes se simplifient deux-à-deux, à l'exception de  $t_0$  et  $-t_n$ .

□

**Remarque :** On dit qu'une telle sommation est **télescopique**.

Les choses deviennent intéressantes lorsque la sommation n'apparaît pas au premier coup d'œil comme étant télescopique...

### Exemple :

Si on pose, pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$$

On peut astucieusement écrire, pour tout  $k \geq 2$  :

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

En effet :

On note, pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n = \frac{1}{n-1}$   
Alors

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$$

=