

Séquence II – Produit scalaire – Applications

Dans toute la suite, on considère deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ainsi que les points distincts A, B, C et D . On se placera toujours dans un repère orthonormé lorsque les coordonnées des vecteurs et des points sont données.

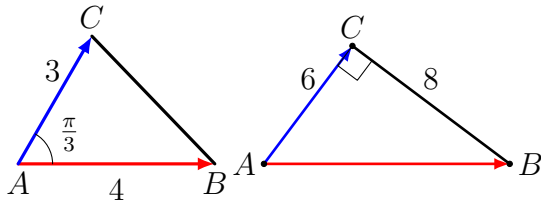
Exercice 1

Soit ABC un triangle équilatéral de longueur de côté 2. On note I le milieu du segment $[AB]$. Calculer les produits scalaires suivants :

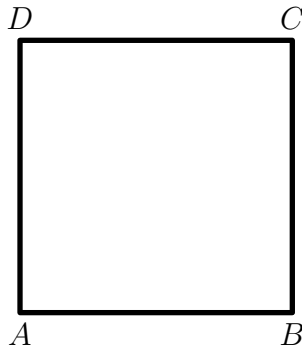
- a) $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$ b) $\vec{AI} \cdot \vec{AC}$ c) $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$

Exercice 2

1. Dans chacun des cas suivants, calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$



2. On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de longueur de côté 3. Calculer $\vec{BC} \cdot \vec{AC}$

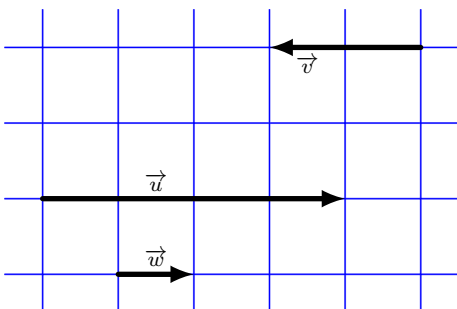


3. On considère $A(-4; 2), B(1; 2), C(2; 8)$. On a alors $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Déterminer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

Exercice 3

Calculer les produits scalaires suivants (l'unité de longueur étant d'un carreau) :

- $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{w} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot \vec{w}$
- $-\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot 3\vec{v}$



Exercice 4

On donne $A(2; -1), B(0; 1)$ et $C(1; -2)$.

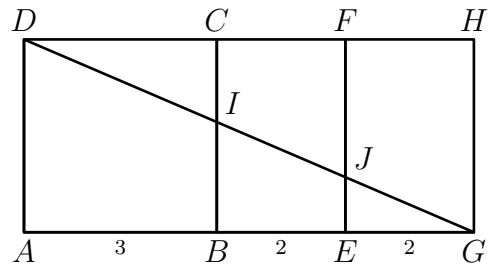
- Calculer AB et AC .
- Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- Que peut-on dire des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$?
- Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 5

On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2$ et $AD = \sqrt{2}$. On note I le milieu du segment $[AB]$. Démontrer que (AC) et (ID) sont perpendiculaires.

Exercice 6

Dans une unité de longueur donnée, on considère un carré $ABCD$ dont le côté a pour mesure 3, accolé à deux rectangles identiques $BEFC$ et $EGHF$ de largeur 2.



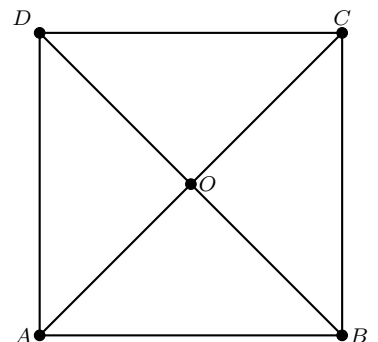
En utilisant la formule du projeté orthogonal, calculer les produits scalaires suivants.

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- $\vec{BA} \cdot \vec{BF}$
- $\vec{EI} \cdot \vec{AG}$
- $\vec{CF} \cdot \vec{GD}$
- $\vec{EJ} \cdot \vec{FA}$

Exercice 7

On considère un carré $ABCD$ de centre O et de longueur de côté c . Calculer les produits scalaires suivants.

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- $\vec{AB} \cdot \vec{AO}$
- $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$
- $\vec{BC} \cdot \vec{AD}$
- $\vec{DB} \cdot \vec{AB}$
- $\vec{OA} \cdot \vec{AC}$
- $\vec{DB} \cdot \vec{OC}$

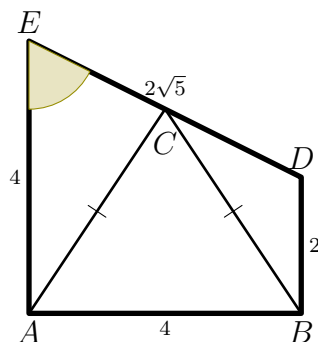


Exercice 8

Le triangle isocèle ABC est inscrit dans un trapèze rectangle $ABDE$.

Les longueurs sont données en cm.

- Grâce à $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED}$, donner une approximation au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{AED}$.
- Grâce à $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC}$, donner une approximation au dixième de cm près la longueur AC .



Exercice 12

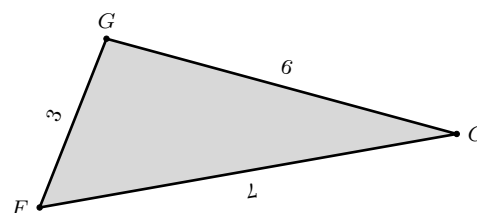
On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Calculer les produits scalaires suivants :

- $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot (-4\vec{v})$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
- $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 5\vec{u})$

Exercice 13

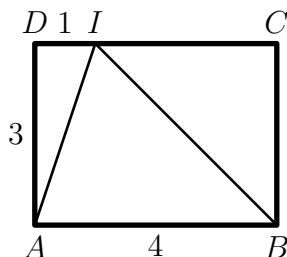
- Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 8$. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$
- On considère la figure suivante :



Calculer $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF}$

Exercice 9

$ABCD$ est un rectangle, I est un point de $[CD]$ défini comme l'indique la figure ci-dessous.



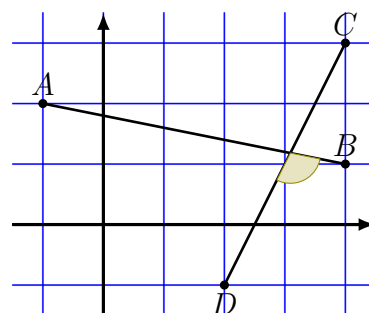
- Démontrer que

$$(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IC} + DA^2$$

- En déduire que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 6$ et $\cos(\widehat{AIB}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Exercice 14

Calculer la mesure en degrés de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$ en lisant les coordonnées des points A , B , C et D dans le repère ci-dessous.



Exercice 10

Soient $ABCD$ un carré de longueur de côté a , I le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[CD]$.

- En utilisant la relation de Chasles, calculer $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI}$.
- Que peut-on en conclure ?

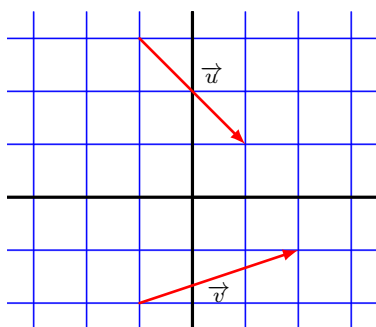
Exercice 15

Démontrer que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

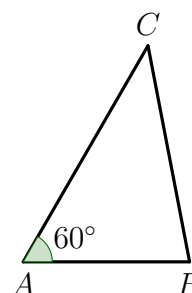
Exercice 11

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère orthonormé ci-contre. Déterminer la norme de chaque vecteur, puis le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$



Exercice 16

On considère la figure ci-contre. Calculer la longueur BC . On donnera une valeur arrondie au dixième.





Point histoire : Droite d'Euler

En 1765, le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 - 1783) démontre que :

« Dans un triangle quelconque, le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité sont alignés. »

Le but de l'exercice suivant est de le démontrer.



Exercice 17

On considère un triangle ABC . On note Q le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (c'est-à-dire le point d'intersection des médiatrices) et G le centre de gravité du triangle ABC (c'est-à-dire le point d'intersection des médianes).

Soit H le point défini par $\overrightarrow{QH} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}$.

1. En utilisant la relation de Chasles, montrer que

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

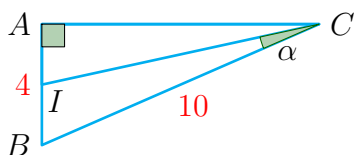
En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC , c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC .

2. En utilisant la définition du point H , déduire que $\overrightarrow{QH} = 3\overrightarrow{QG}$. Cette relation est appelée **relation d'Euler**.
3. Conclure que les points Q , H et G sont alignés, comme l'affirmait Euler.



Exercice 18

On considère la figure ci-contre, dans laquelle I est le milieu du segment $[AB]$.



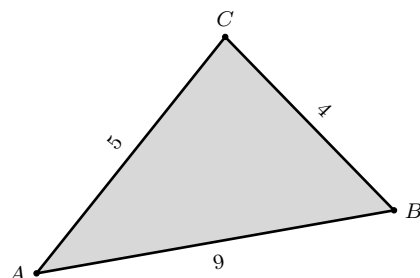
1. Calculer les valeurs exactes de CA et CI .
2. En déduire une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle α .



Exercice 19

On considère la figure ci-dessous.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré près.



Exercice 20

A , B et C sont trois points tels que $AB = 5$ et $AC = 8$.

1. Est-il possible d'avoir $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 60$?

On pose dorénavant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$.

2. Quelle est la valeur, en degrés, de $\widehat{BAC}$?
3. Calculer BC .
4. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.



Exercice 21

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne $A(2 ; 1)$, $B(-1 ; -3)$ et $C(-3 ; 0)$.

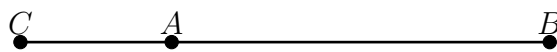
1. Faire une figure.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au dixième de degré.
4. On note H le projeté orthogonal de B sur (AC) . Calculer la valeur exacte de AH .



Exercice 22

Dans chacun des cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

1. ABC est un triangle tel que $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 7$ cm.
2. $A(2 ; 4)$, $B(-1 ; 3)$ et $C(1 ; -2)$ dans un repère orthonormé.
3. $AB = 6$ cm, $AC = 5$ cm et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ radians.
4. $AB = 6$ cm dans un triangle ABC rectangle en B .
5. $AB = 2AC = 6$ cm dans le contexte suivant



Exercice 23

1. Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, où x est un réel. Déterminer toutes les éventuelles valeurs de x telles que :

$$a) (\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad b) (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$$

2. Déterminer les éventuelles valeurs de x pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

$$a) \vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ x \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ x \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x-1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c) \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x+6 \\ 2x-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

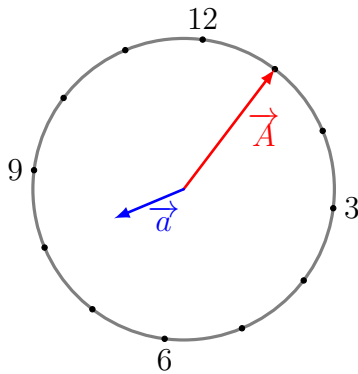
Exercice 24

On considère $A(3 ; 0), B(-1 ; 4), C(-3 ; -2)$.

1. Calculer les longueurs AB, BC et CA .
2. En déduire la nature du triangle ABC .
3. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
4. En déduire que $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
5. En déduire une mesure au degré près de $\widehat{BAC}$.
6. Donner une valeur approchée au degré près de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CAB}$.

Exercice 25

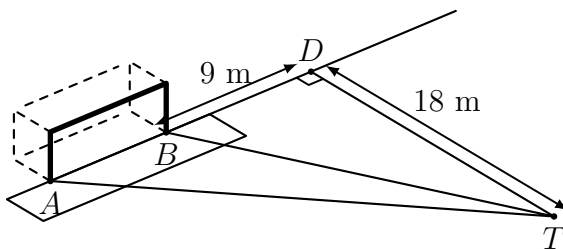
L'horloge ci-dessous affiche 8 h 05. La petite aiguille est représentée par le vecteur $\vec{a}$ et la grande par le vecteur $\vec{A}$. On suppose que $\|\vec{a}\| = 1$ et $\|\vec{A}\| = 2$.



1. Calculer le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{A}$
2. Si elle affiche 3 h 25 min, que vaut le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{A}$?
3. Si $\vec{a} \cdot \vec{A} = -2$ et que la petite aiguille est sur le 11, quelle heure est-il ?

Exercice 26

Sur le dessin ci-dessous, la largeur du but est $AB = 7,32$ m. Les points A, B et D sont alignés. On appelle T le point où se trouve un ballon. Le triangle TAD est rectangle en D .



1. Pourquoi a-t-on $\overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$?
2. Démontrer que $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = 470,88$.
3. Déterminer une valeur approchée, au dixième près, de l'angle de tir, c'est-à-dire de $\widehat{ATB}$.

Exercice 27

$ABCD$ est un rectangle. Soit $AB = 8$ et $AD = 5$. Soit E le point de $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$, F un point de $[DC]$. Déterminer la position de F telle que les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux.

