

Autour de la première identité de polarisation

Le but de démontrer la propriété suivante :

■ PROPRIÉTÉ : Identité de polarisation (1)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \quad (*)$$

1. Une preuve calculatoire

1. En utilisant les propriétés de calcul usuelles du produit scalaire, montrer que

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

2. Retrouver l'identité de la propriété précédente.

Cette démonstration (rapide!) a un inconvénient majeur : elle utilise une propriété qui se démontre à l'aide de l'identité de polarisation ! Ainsi, on suppose que P est vraie pour montrer que Q est vraie, puis on utilise Q pour montrer que P est vraie. Il convient donc de démontrer autrement la première identité de polarisation :

2. Une preuve géométrique

1. Étudier le cas où $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
2. Supposons que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. Soient A, B et C trois points du plan tels que : $\overrightarrow{AC} = -\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. Montrer que

$$\frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (CB^2 - AC^2 - AB^2)$$

3. Pour cette question uniquement, on suppose que ABC est un triangle rectangle en A .
Dédurre de la proposition précédente que l'identité de polarisation est vérifiée dans ce cas.

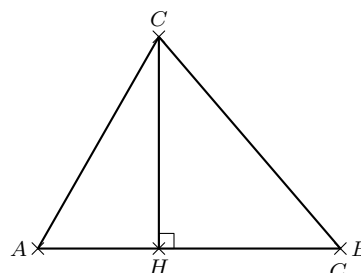
Dans la suite, on suppose que ABC n'est pas un triangle rectangle.

4. Notons H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) . Montrer que

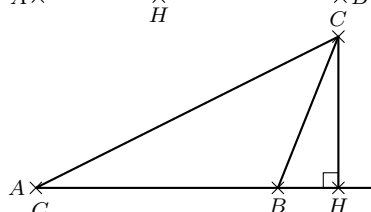
$$\frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (BH^2 - AH^2 - AB^2)$$

5. On va distinguer trois cas : $H \in [AB]$ ou bien $H \in [AB) \setminus [AB]$ ou bien $H \notin [AB]$ (avec $H \neq A$ car ABC n'est pas rectangle en A).

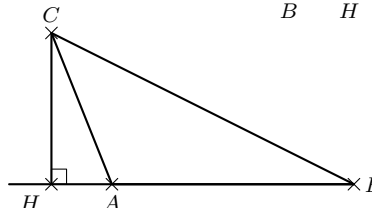
- a) Si $H \in [AB]$: que peut-on dire de l'angle $\widehat{BAC}$? Montrer que l'identité de polarisation est vraie dans ce cas.



- b) Si $H \in [AB) \setminus [AB]$: que peut-on dire de l'angle $\widehat{BAC}$? Montrer que l'identité de polarisation est vraie dans ce cas.



- c) Si $H \notin [AB)$: que peut-on dire de l'angle $\widehat{BAC}$? Montrer que l'identité de polarisation est vraie dans ce cas.



6. Conclure.