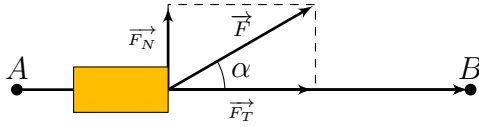


# Produit scalaire

## 1. Introduction physique et définition

### A. Introduction

On déplace un mobile en ligne droite du point  $A$  au point  $B$  (distinct de  $A$ ) en appliquant une force  $\vec{F}$  constante en un point de l'objet.



Le vecteur force  $\vec{F}$  se décompose en une composante notée  $\vec{F}_T$  de même direction que  $\vec{AB}$  et une composante notée  $\vec{F}_N$ , orthogonale à  $\vec{AB}$ . On a donc :

$$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N$$

Pendant le déplacement du mobile, seule la composante  $\vec{F}_T$  travaille en contribuant au mouvement ; la composante  $\vec{F}_N$ , en revanche, ne contribue pas au mouvement, elle ne travaille pas.

On définit le **travail**  $W$  de la force  $\vec{F}$  sur le déplacement rectiligne de  $A$  à  $B$  par :

$$W = \|\vec{F}_T\| \times AB = \|\vec{F}\| \times \cos(\alpha) \times AB$$

où l'on note  $\alpha$  la mesure principale en radians de l'angle  $(\vec{F}; \vec{AB})$ .

$W$  est aussi appelé **produit scalaire des vecteurs**  $\vec{F}$  et  $\vec{AB}$  qui se note  $\vec{F} \cdot \vec{AB}$  et se lit «  $\vec{F}$  scalaire  $\vec{AB}$  ».

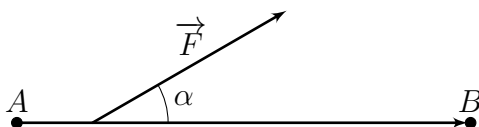
Autrement dit :

$$\vec{F} \cdot \vec{AB} = \|\vec{F}\| \times AB \times \cos \alpha$$

Sur la figure ci-dessus, la force s'exerce sur le mobile pour l'amener de  $A$  à  $B$ , donc  $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Donc  $W > 0$ , c'est-à-dire  $\vec{F} \cdot \vec{AB} > 0$ .

Le travail de la force  $\vec{F}$  dans le déplacement de  $A$  vers  $B$  est donc **moteur**.

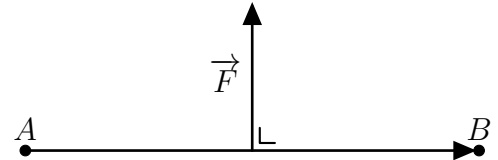


Cette définition du travail (et ainsi du produit scalaire des vecteurs  $\vec{F}$  et  $\vec{AB}$ ) est également valable si :

- $\alpha = \frac{\pi}{2}$  : dans ce cas, le mobile n'avance pas,

$$\vec{F} \cdot \vec{AB} = \vec{F} \times AB \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

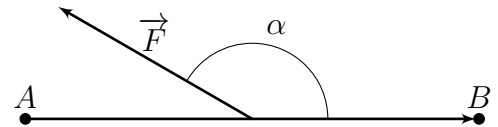
donc  $W = 0$  et donc le travail de la force  $\vec{F}$  dans le déplacement de  $A$  vers  $B$  est **nul**.



- $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$  : dans ce cas, la force  $\vec{F}$  s'oppose au mouvement de  $A$  vers  $B$ , et comme  $\cos \alpha < 0$ , alors

$$\vec{F} \cdot \vec{AB} = \|\vec{F}\| \times AB \times \cos(\alpha) < 0$$

donc  $W < 0$  : le travail de la force  $\vec{F}$  dans le déplacement de  $A$  vers  $B$  est **résistant**.



### B. Définition et premières propriétés

#### ■ DÉFINITION :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan.

Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  alors le **produit scalaire des vecteurs**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le nombre réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  alors le **produit scalaire des vecteurs**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est nul :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

#### ■ PROPRIÉTÉ :

Pour tout vecteur  $\vec{u}$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{u}) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos 0 \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times 1 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \end{aligned}$$

□

## ■ PROPRIÉTÉ :

Quels que soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

*Démonstration.* Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan.

- Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  alors par définition :  
 $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , donc  $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ .
- Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  alors

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos(\vec{v}; \vec{u})$$

Or,  $(\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v}) [2\pi]$  et, pour tout réel  $\alpha$ ,  $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ . Donc :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

□

## ■ PROPRIÉTÉ :

Quels que soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,

$$\vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v}$$

*Démonstration.* Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan.

- Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  alors par définition :

$$\vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  alors

$$\vec{u} \cdot (-\vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; -\vec{v})$$

Or

$$(\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi [2\pi]$$

et pour tout réel  $\alpha$ ,  $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$ .

$$\text{Donc : } \vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

□

## ■ PROPRIÉTÉ :

Quels que soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , quel que soit le réel  $k$ ,

$$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

*Démonstration.* Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan.

- Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  alors, pour tout réel  $k$  :

$$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0 = k \times (\vec{0} \cdot \vec{0}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

- Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  et  $k \in \mathbb{R}^*$  :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (k\vec{v}) &= \|\vec{u}\| \times \|k\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; k\vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\| \times |k| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; k\vec{v}) \\ &= |k| \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; k\vec{v}) \end{aligned}$$

- Si  $k > 0$  : les vecteurs  $\vec{v}$  et  $k\vec{v}$  sont de même sens donc  $(\vec{u}; k\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) [2\pi]$  et donc :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (k\vec{v}) &= |k| \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; k\vec{v}) \\ &= k \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \\ &= k \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

- Si  $k < 0$ , les vecteurs  $\vec{v}$  et  $k\vec{v}$  sont de sens opposés donc  $(\vec{u}; k\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi [2\pi]$  et donc :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (k\vec{v}) &= |k| \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; k\vec{v}) \\ &= -k \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos((\vec{u}; \vec{v}) + \pi) \\ &= -k \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times (-\cos(\vec{u}; \vec{v})) \\ &= k \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \\ &= k \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

- Et si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  et  $k = 0$  alors le résultat est évident.

□

## ■ PROPRIÉTÉ :

Si les directions des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls sont perpendiculaires, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

*Démonstration.* Avec les hypothèses de la propriété,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

□

## ■ DÉFINITION :

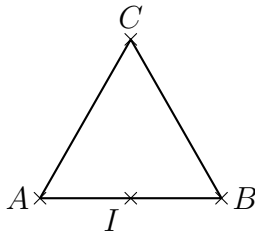
On dira que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux** si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

## ■ PROPRIÉTÉ :

Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  alors les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

### Exemple :

Soit  $ABC$  un triangle équilatéral de longueur de côté  $a$ . Le point  $I$  est le milieu du segment  $[AB]$ . Calculer  $\overrightarrow{AB}^2$ ,  $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$ ,  $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$  puis  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .



- $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2 = a^2$
- $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} = 0$  car les vecteurs sont orthogonaux.
- $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\|\overrightarrow{IA}\| \times \|\overrightarrow{IB}\| = -\frac{a^2}{4}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{a^2}{2}$

## 2. Les quatre définitions du produit scalaire

### ■ PROPRIÉTÉ : Identité de polarisation (1)

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \quad (*)$$

Démonstration. En exercice. □

### ■ PROPRIÉTÉ :

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé du plan.

On considère deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  dans ce repère.

Alors :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ .

Démonstration. On reprend les notations de la propriété. D'après l'identité de polarisation (1) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

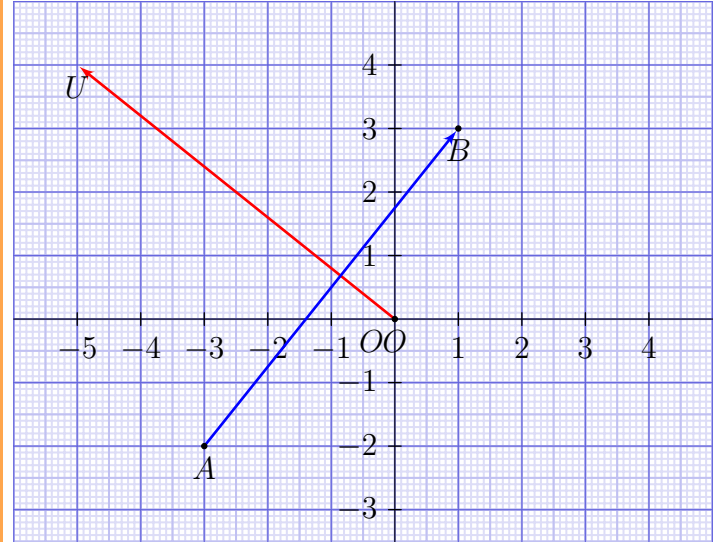
Or :  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ , donc :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} [(x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)] \\ &= \frac{1}{2} [x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2] \\ &= xx' + yy' \end{aligned}$$

c'est ce qu'il fallait démontrer. □

### Exemple :

Dans le repère orthonormé ci-dessous, placer les points  $A(-3; -2)$ ,  $B(1; 3)$  et un représentant du vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\vec{u}$  sont-ils orthogonaux ?



$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 3 - (-2) \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times (-5) + 5 \times 4 = 0.$$

Donc les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux.

### ■ PROPRIÉTÉ : Distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition des vecteurs

Soient trois vecteurs du plan  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ . Alors

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Démonstration. Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé du plan. On note respectivement  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$  les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  dans ce repère.

Alors :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix} \\ &= x(x' + x'') + y(y' + y'') \\ &= xx' + yy' + xx'' + yy'' \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. □

**En résumé :** outre la propriété de distributivité qui est très utile en pratique, on retiendra :

- Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  alors il y a quatre définitions possibles du produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

1. La définition « avec le cosinus »

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

2. La définition grâce à l'identité de polarisation

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

3. La définition (par les coordonnées) : dans un repère orthonormé : si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

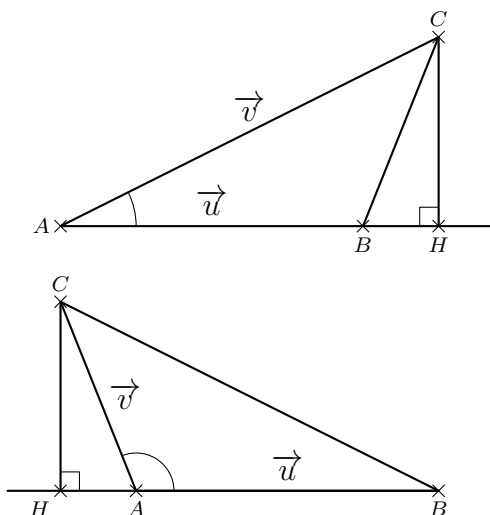
4. La définition « avec la projection orthogonal »

Si  $A, B$  et  $C$  sont trois points du plan tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ,  $H$  étant le projeté orthogonal du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ , alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } H \in [AB] \\ -AB \times AH & \text{si } H \notin [AB] \end{cases}$$

Autrement dit, dans tous les cas, on peut calculer le produit scalaire par projection orthogonale sur la droite  $(AB)$  :

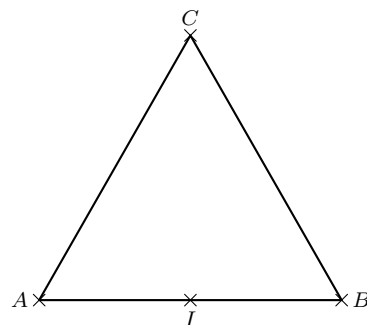
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$



### Exemple :

Soient  $ABC$  un triangle équilatéral de longueur de côté  $a$  et  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ , calculer en utilisant deux définitions différentes parmi les quatre :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} \quad ; \quad \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CB}$$



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AI} \\ &= \overrightarrow{AI}^2 \\ &= \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \\ &= \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} &= \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AI}\| \times \cos(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AC}) \\ &= a \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

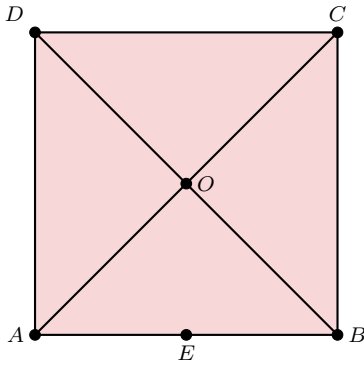
$$\begin{aligned} \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CI} \\ &= \overrightarrow{CI}^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \\ &= \frac{3a^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CB} &= \|\overrightarrow{CI}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos(\overrightarrow{CI}; \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3a^2}{4} \end{aligned}$$

**Exemple :**

Soient  $ABCD$  un carré de centre  $O$  et de longueur de côté 1, et  $E$  le milieu du segment  $[AB]$ , calculer en utilisant deux définitions différentes parmi les quatre :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OD}$$



On se place dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ . Dans ce cas, les coordonnées des points considérés sont  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(1; 1)$ ,  $D(0; 1)$ ,  $O(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$  et  $E(\frac{1}{2}; 0)$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\ &= 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Comme  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on obtient :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1$$

Comme  $\overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , on obtient :

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CB} &= -\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= -\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CO} \\ &= -\overrightarrow{CO}^2 \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Comme  $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{OD} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , on obtient :

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OD} = -1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{DC} \cdot (-\overrightarrow{DO}) \\ &= -(\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DO}) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Il faut de plus connaître les propriétés calculatoires « naturelles » du produit scalaire :

Pour tous vecteurs du plan  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  et tout réel  $k$  :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  (distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition)
- Pour tous points  $A$  et  $B$  :  $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$

**Exemple :**

Montrer que pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (**)$$

En déduire que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2) \quad (***)$$

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 \\ &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 \\ &= \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ &= \vec{u}^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{v}^2 \end{aligned}$$

Puis en ajoutant les égalités (\*) et (\*\*) membre à membre, on obtient

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 + \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ &= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \\ &= 2(\vec{u}^2 + \vec{v}^2) \end{aligned}$$

**Remarque :** Les égalités (\*), (\*\*) et (\*\*\*) sont appelées **identités** ou **formules de polarisation**.

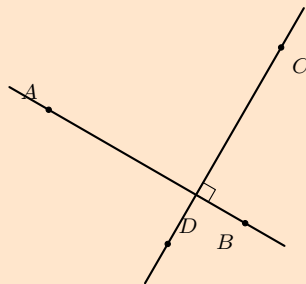
### 3. Utilité du produit scalaire

A. Montrer que des droites sont perpendiculaires

#### ■ PROPRIÉTÉ :

Si  $A, B, C$  et  $D$  sont quatre points du plan tels que  $A \neq B$  et  $C \neq D$ , alors

$$(AB) \perp (CD) \iff \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$



Exemple :

Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes (cf. feuille d'exercices).

### 2. Calculer des angles et des distances

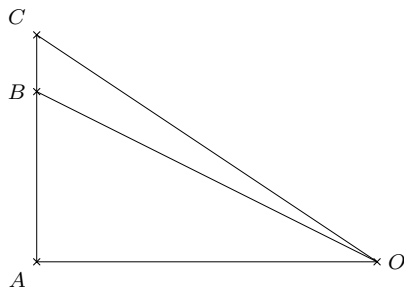
#### ■ PROPRIÉTÉ :

Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , alors

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Exemple :

Une unité de longueur étant fixée, on considère un triangle  $OAC$  rectangle en  $A$  tel que  $AC = 23$  et  $OA = 30$ . Le point  $B$  est le point du segment  $[AC]$  tel que  $AB = 15$ .



Montrer que  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 1245$ .

En déduire  $\cos(\widehat{BOC})$  et la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle  $\widehat{BOC}$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Or,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  car  $(OA) \perp (AC)$  par hypothèse. De plus,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$  car  $(OA) \perp (AB)$  par hypothèse. Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= OA^2 + AB \times AC \\ &= 30^2 + 15 \times 23 \\ &= 900 + 345 \\ &= 1245\end{aligned}$$

Puis,  $\cos(\widehat{BOC}) = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OB}\| \times \|\overrightarrow{OC}\|}$ . On calcule  $\|\overrightarrow{OB}\|$  et  $\|\overrightarrow{OC}\|$  en utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles  $OAB$  et  $OAC$  rectangles en  $A$ . On obtient

$$\begin{aligned}OB &= \sqrt{AB^2 + AO^2} \\ &= \sqrt{15^2 + 30^2} \\ &= \sqrt{225 + 900} \\ &= \sqrt{1125} \\ &= 15\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}OC &= \sqrt{AC^2 + AO^2} \\ &= \sqrt{23^2 + 30^2} \\ &= \sqrt{529 + 900} \\ &= \sqrt{1429}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{BOC}) &= \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OB}\| \times \|\overrightarrow{OC}\|} \\ &= \frac{1245}{15\sqrt{5} \times \sqrt{1429}} \\ &= \frac{83}{\sqrt{7145}}\end{aligned}$$

Enfin, on en conclut que  $\widehat{BOC} = \arccos\left(\frac{83}{\sqrt{7145}}\right)$ , c'est-à-dire  $\widehat{BOC} \approx 11^\circ$ .

