

Séquence I – Pour réviser pour le premier contrôle – exercices supplémentaires

Exercice 1

Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^4 - 1}{x}$$

$$h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto 2^n$$

$$i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x(x^2 + 1)$$

$$k : [3; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x - 3}$$

Exercice 2

On définit la fonction cotangente, notée $\cotan$, par

$$\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de $\cotan$.
2. Montrer que $\cotan$ est impaire et π -périodique.
3. A-t-on $\cotan = \frac{1}{\tan}$?

Exercice 3

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)$$

est 4π -périodique et que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \cos(2x) + |\sin(3x)|$$

est π -périodique.

Exercice 4

On considère les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ et } g : x \mapsto 4x - 3.$$

Étudier par le calcul les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 5

Montrer, en utilisant la définition, que la fonction $f : x \mapsto 5x - 3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $g : x \mapsto 2 - 3x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

On souhaite comparer, sans les calculer, les deux nombres :

$$A = \frac{0,99999999}{1,99999999} \text{ et } B = \frac{0,99999998}{1,99999998}$$

Pour cela on considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$
2. Déterminer deux réels α et β tels que $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+1}$. En déduire le sens de variation de f .
3. Déterminer deux réels a et b tels que $A = f(a)$ et $B = f(b)$. Conclure.

Exercice 7

Soit la fonction définie par :

$$g : x \mapsto \frac{2x - 3}{x - 3}$$

Déterminer $\mathcal{D}_g$ l'ensemble de définition de g puis montrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_g, g(x) = 2 + \frac{3}{x - 3}$$

Établir que :

$$\forall u \in \mathcal{D}_g, \forall v \in \mathcal{D}_g, g(u) - g(v) = \frac{3(v - u)}{(u - 3)(v - 3)}$$

En déduire l'étude des variations de g sur $] -\infty; 3[$ puis sur $]3; +\infty[$ Dresser le tableau de variations (et de valeurs) de g , puis construire sa représentation graphique dans un repère du plan.

Exercice 8

Soit h la fonction définie par :

$$h : x \mapsto \sqrt{5(x - 2)}$$

Déterminer $\mathcal{D}_h$ l'ensemble de définition de h .

Établir que :

$$\forall u \in \mathcal{D}_h, \forall v \in \mathcal{D}_h, h(u) - h(v) = \frac{\sqrt{5}(u - v)}{\sqrt{u + 2} + \sqrt{v + 2}}$$

En déduire l'étude des variations de h puis dresser son tableau de variations. Construire la représentation graphique de la fonction .

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1

- L'ensemble $\mathbb{R}^*$ est centré en 0 et, pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 - 1}{-x} = \frac{x^4 - 1}{-x} = -f(x)$$

donc f est impaire.

- $\mathbb{Z}$ est centré en 0. $h(1) = 2$ et $h(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ donc $h(-1) \neq h(1)$ et $h(-1) \neq -h(1)$. Ainsi, h n'est ni paire ni impaire.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ est centré en 0 et, pour tout réel x ,

$$i(-x) = (-x)((-x)^2 + 1) = -x(x^2 + 1) = -i(x)$$

donc i est impaire.

- L'ensemble $[3; +\infty[$ n'est pas centré en 0 car $3 \in [3; +\infty[$ mais $-3 \notin [3; +\infty[$ donc k n'est ni paire ni impaire.

Solution de l'exercice 3

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $x + 4\pi \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f(x + 4\pi) &= \sin\left(\frac{1}{2}(x + 4\pi) + \frac{3}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{2}x + 2\pi + \frac{3}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = f(x) \end{aligned}$$

donc f est 4π -périodique.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $x + \pi \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} g(x + \pi) &= \cos(2(x + \pi)) + |\sin(3(x + \pi))| \\ &= \cos(2x + 2\pi) + |\sin(3x + 3\pi)| \\ &= \cos(2x) + |\sin(3x + \pi)| \\ &= \cos(2x) + |-\sin(3x)| \\ &= \cos(2x) + |\sin(3x)| = g(x) \end{aligned}$$

donc g est π -périodique.

Solution de l'exercice 4

1. Courbes représentatives

Voici les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère :

2. Étude des positions relatives

Pour tout réel $x \neq 0$,

$$d(x) := f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - (4x - 3) = \frac{1 - x(4x - 3)}{x} = \frac{-4x^2 + 3x + 1}{x}$$

Étudions le signe de $-4x^2 + 3x + 1$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 3^2 - 4 \times (-4) \times 1 = 25 > 0$

donc l'équation $-4x^2 + 3x + 1 = 0$ possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times (-4)} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times (-4)} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

Comme $a = -4 < 0$, on a donc le tableau de signes suivant :

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $] -\infty; -\frac{1}{4}[$ et $]0; 1]$, et en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $[-\frac{1}{4}; 0[$ et $[1; +\infty[$.

Solution de l'exercice 5

- Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Alors, comme $5 > 0$, $5a < 5b$ donc $5a - 3 < 5b - 3$, c'est-à-dire $f(a) < f(b)$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Alors, comme $-3 < 0$, $-3a > -3b$ donc $2 - 3a > 2 - 3b$, c'est-à-dire $g(a) > g(b)$. Ainsi, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 6

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ est centré en 0 et, pour tout réel x ,

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x)$$

donc f est paire.

2. D'une part, on remarque que $f(0) = \frac{0^2 - 1}{0^2 + 1} = -1$. D'autre part, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f(x) - (-1) &= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + 1 \\ &= \frac{x^2 - 1 + (x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{2x^2}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Comme $x^2 + 1 > 0$, on en déduit que $f(x) \geq -1$, c'est-à-dire que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est -1 , atteint en 0.

3. Pour tout réel x , on a $x^2 - 1 \leq x^2 + 1$ et $x^2 + 1 > 0$, donc

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq 1$$

Ainsi, f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

4. Posons, pour tout réel x , $d(x) = f(x) - (x - 1)$. Ainsi, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - (x - 1) \\ &= \frac{x^2 - 1 - (x^2 + 1)(x - 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{-x(x - 1)^2}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Comme $(x - 1)^2 \geq 0$ et $x^2 + 1 > 0$, le signe de $d(x)$ est celui de $-x$. On en déduit que C_f est au-dessus de (D) sur $] - \infty, 0]$ et en dessous de (D) sur $[0, +\infty[$.