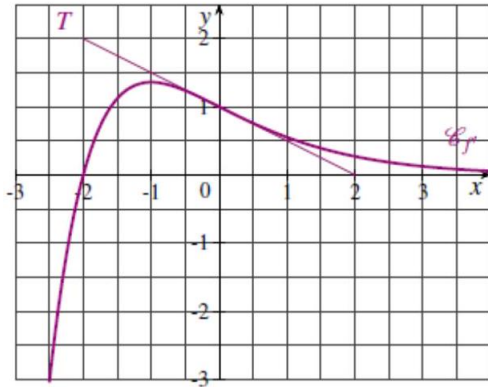


Séquence I – Pour réviser pour le deuxième contrôle

exercices supplémentaires sur la convexité

Exercice 1

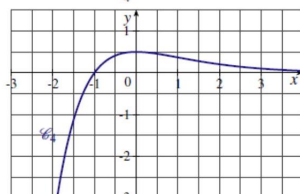
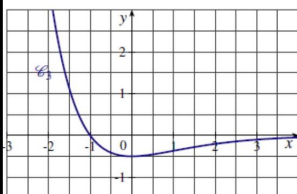
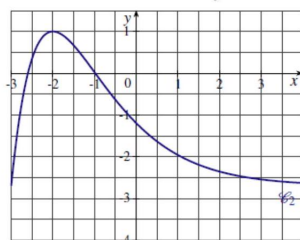
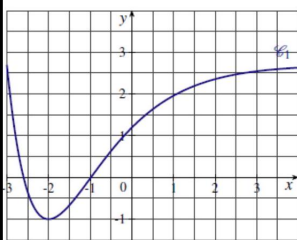
Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde. La courbe représentative de la fonction dérivée notée $\mathcal{C}_{f'}$ est donnée ci-dessous. La droite $\mathcal{T}$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_{f'}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique :

- Résoudre $f'(x) = 0$
- Résoudre $f''(x) = 0$
- Déterminer $f''(0)$

2. Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f et une autre la courbe est représentative de la dérivée seconde f'' .



- Déterminer la courbe qui représente f et celle qui représente f'' .
- Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et les intervalles sur lesquels f est concave.
- La courbe représentative de f admet-elle un point d'inflexion ?

Exercice 2

Le tableau ci-dessous représente l'évolution du taux d'endettement des ménages, en pourcentage du revenu disponible brut, en France de 2001 à 2010.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux d'endettement y_i	52,2	53,2	55,6	58,6	63,4	67,4	70,9	73,5	75,7	78,9

Une estimation de l'évolution du taux d'endettement des ménages est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 11]$ par :

$$f(x) = -0,04x^3 + 0,68x^2 - 0,06x + 51,4$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 2000.

Ainsi, le taux d'endettement des ménages en % à la fin du premier semestre 2003 est estimé par $f(2,5)$.



- Calculer la valeur estimée du taux d'endettement des ménages en 2009.
 - Calculer le pourcentage d'erreur par rapport au taux réel d'endettement des ménages en 2009.
- Calculer, pour tout $x \in [0; 11]$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
 - Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et les intervalles sur lesquels f est concave.
 - La courbe représentative de f a-t-elle un point d'inflexion ?
- Le rythme de croissance instantané du taux d'endettement est assimilé à la dérivée de la fonction f .
Au cours de quelle année, le rythme de croissance du taux d'endettement a-t-il commencé à diminuer ?

Exercice 3

Soit f la fonction définie et dérivable pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 3}{x^2 + 3}$$

1. Montrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{x^4 + 9x^2}{(x^2 + 3)^2}$$

2. Étudier le sens de variation de f .
3. Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe et ceux sur lesquels f est concave.
4. Déterminer les éventuels points d'inflexion.

Exercice 4

Démontrer l'inégalité suivante grâce à un argument de convexité et une tangente bien choisie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, x^{n+1} \geq (n+1)x - n$$

Exercice 5

Étudier la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ et tracer la courbe dans un repère.

Exercice 6

Soient f et g deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que f soit convexe et g soit à la fois convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 7

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$, concave et vérifiant $f(0) \geq 0$.

Montrer que f est **sous-additive**, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

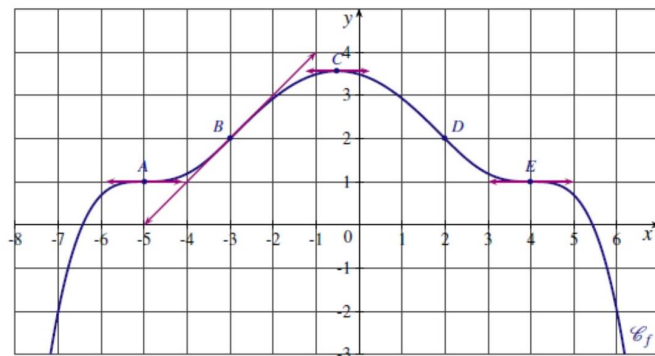
Indication : pour y fixé, étudier la fonction g définie par :

$$g(x) = f(x+y) - f(x) - f(y)$$

Exercice 8

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- L'abscisse du point C est égale à $-0,5$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $B(-3; 2)$ passe par le point $B'(-5; 0)$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $D(2; 2)$ a pour équation $y = -x + 4$.



1. a) Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D .
b) Déterminer $f'(2)$.

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique :

2. Déterminer $f'(-3)$ et $f'(4)$.
3. Compléter les pointillés par le symbole de comparaison adapté :

$$f'(-5) \dots 0$$

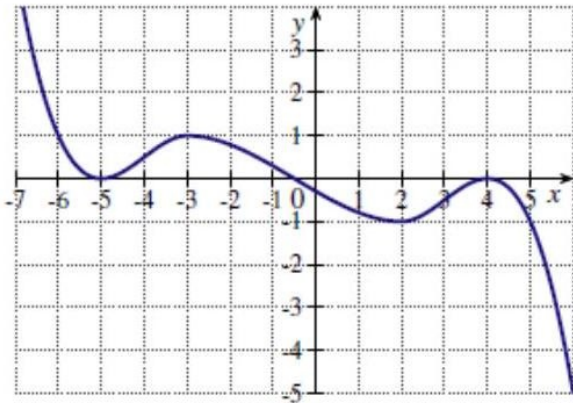
$$f'(-7) \dots f'(6)$$

$$f''(-1) \dots f''(3)$$

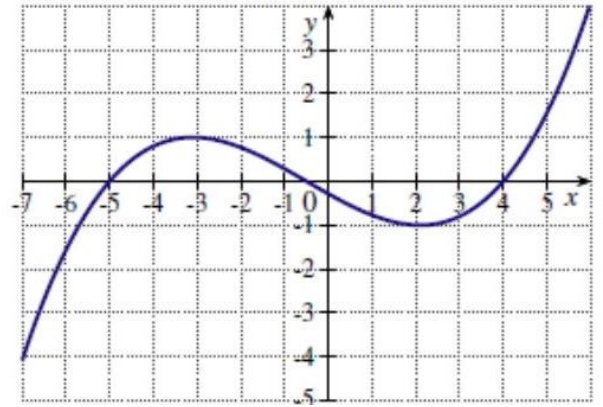
$$f''(2) \dots 0$$

4. Quels sont les points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$?
5. Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ données en annexe est la courbe représentative de la dérivée f' et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f'' . Les identifier.

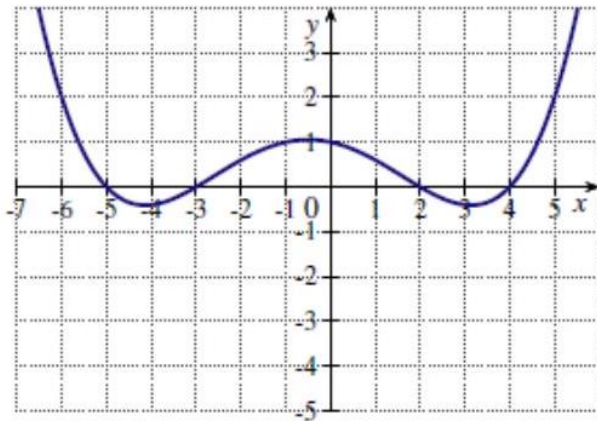
Séquence I – Annexe à l'exercice 8



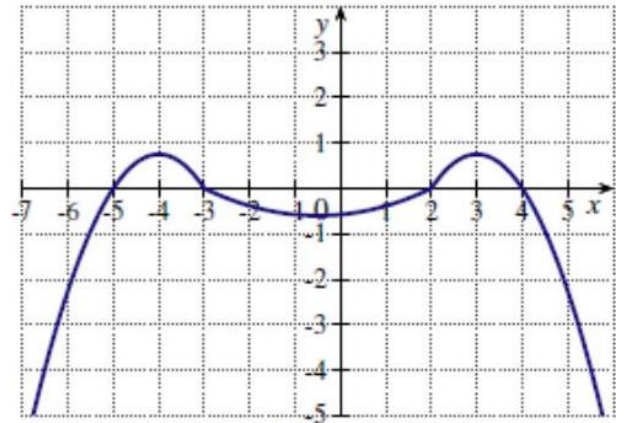
Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_3$

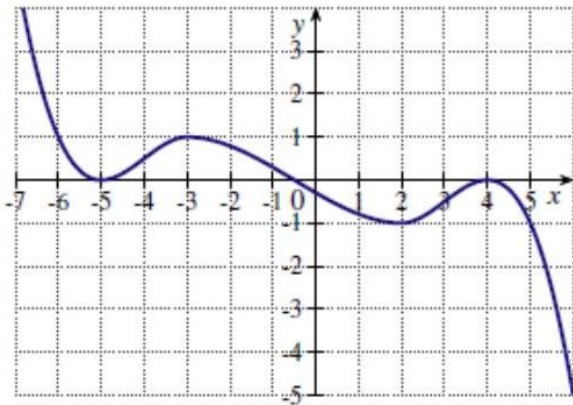


Courbe $\mathcal{C}_2$

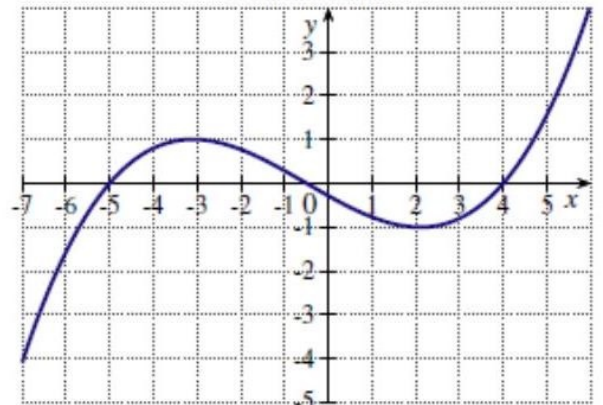


Courbe $\mathcal{C}_4$

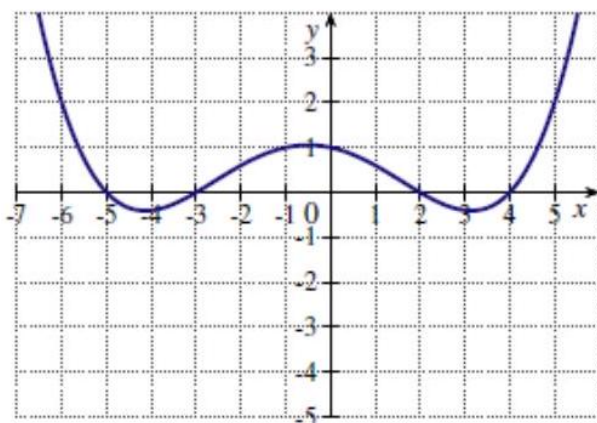
Séquence I – Annexe à l'exercice 8



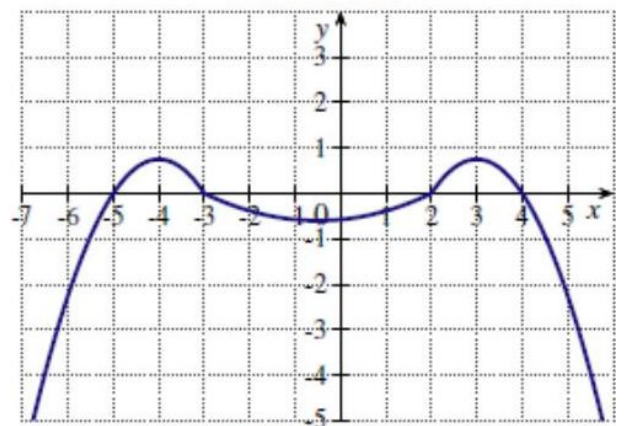
Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_3$



Courbe $\mathcal{C}_2$



Courbe $\mathcal{C}_4$

