

TRIGONOMETRIE

FICHE DE RÉVISION

1 Dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1. Il est orienté dans le sens direct, autrement dit, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Cela permet de :

- ✓ associer à chaque réel de la droite numérique un unique point du cercle ;
- ✓ définir le cosinus et le sinus de tous les nombres réels (ce qui n'était pas le cas avec les formules dans le triangle rectangle).

2 Le radian est une autre unité pour mesurer les angles. Elle est définie à partir de la longueur d'un arc du cercle trigonométrique. Une mesure d'un angle en radian est proportionnelle à sa mesure en degré.

Cela permet de :

- ✓ associer une mesure d'angle à n'importe quel réel x repéré sur le cercle trigonométrique ;
- ✓ faire des calculs d'angles plus facilement qu'avec une mesure exprimée en degré.

3 Le cosinus et le sinus d'un nombre réel x sont des réels définis de façon unique pour chaque réel.

Si M est le point image associé au réel x alors :

• le cosinus de x est l'abscisse du point M : $\cos(x) = x_M$;

• le sinus de x est l'ordonnée du point M : $\sin(x) = y_M$.

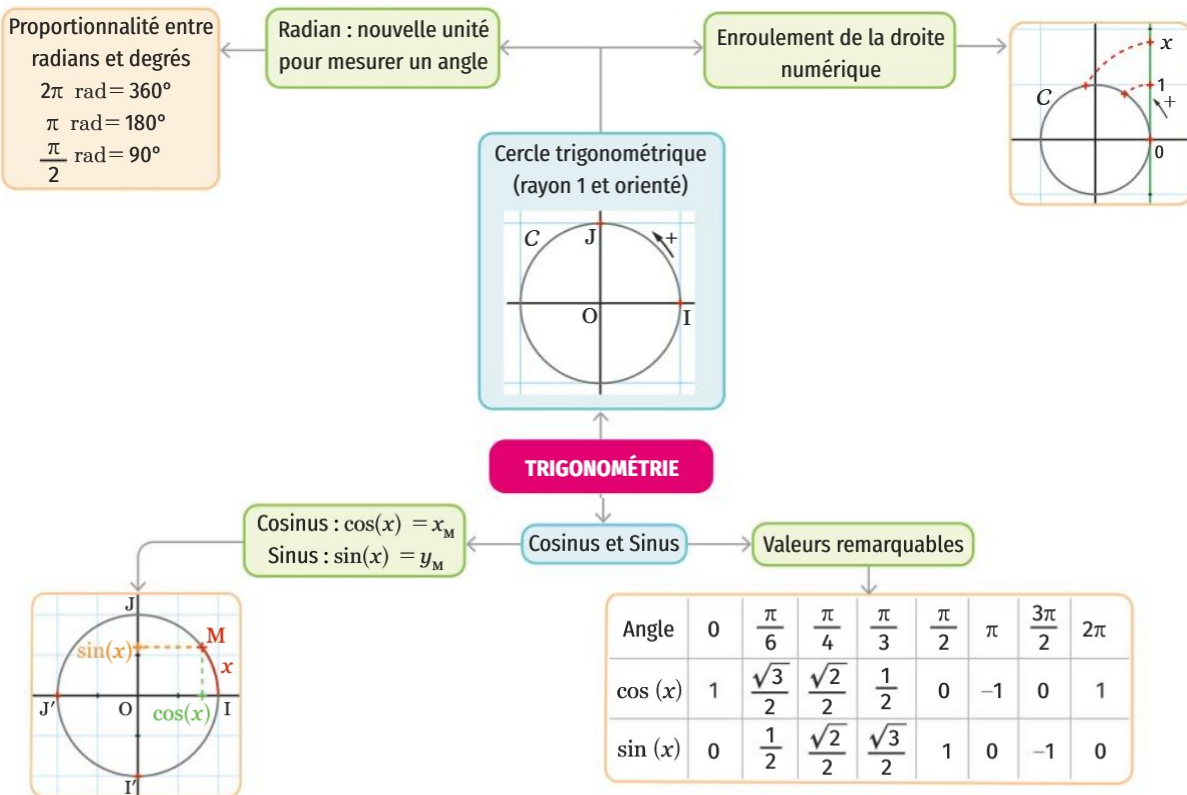
De plus : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$; $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Cela permet de :

- ✓ calculer le cosinus et le sinus de n'importe quel réel x ;
- ✓ résoudre des équations ou des inéquations contenant des sinus et des cosinus.

4 Les valeurs remarquables sont des valeurs à connaître par cœur. Cela permet de :

- ✓ résoudre des problèmes de façon exacte ;
- ✓ retrouver les valeurs d'autres mesures d'angles de façon exacte.

CARTE MENTALE



QCM

réponse unique

8 Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé du plan. Si M est un point du cercle trigonométrique tel que :

- ~~a~~ $\widehat{IOM} = 72^\circ$, alors M est le point image de $\frac{\pi}{5}$.
~~b~~ $\widehat{IOM} = 200^\circ$, alors M est le point image de $\frac{10\pi}{9}$.
c $\widehat{IOM} = 126^\circ$, alors M est le point image de $\frac{7\pi}{10}$.
~~d~~ $\widehat{IOM} = 60^\circ$, alors M est le point image de $\frac{\pi}{6}$.

9 Dans la liste des nombres réels ci-dessous, un seul nombre n'admet pas le même point image que les autres sur un cercle trigonométrique. Lequel ?

- a** $\frac{29\pi}{6}$
b $\frac{125\pi}{6}$
c $\frac{-31\pi}{6}$
d $\frac{-85\pi}{6}$

10 Soit $a = \frac{-\pi}{4}$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

- a** $\sin(a) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
b $\sin(a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
c $\cos(a) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
d $\cos(a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

11 Le réel $\frac{7\pi}{12}$ admet :

- a** un cosinus positif et un sinus positif.
b un cosinus positif et un sinus négatif.
c un cosinus négatif et un sinus positif.
d un cosinus négatif et un sinus négatif.

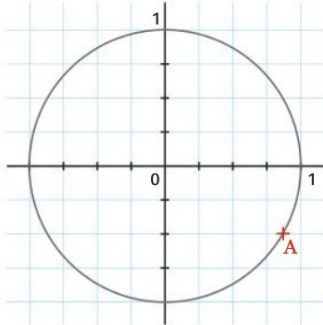
QCM

réponses multiples

[Une ou plusieurs bonnes réponses par question]

12 Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, A est le point image de :

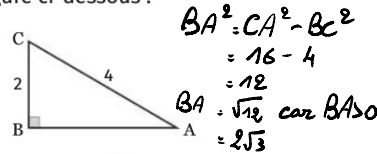
- ~~a~~ $-\frac{5\pi}{6}$
b $\frac{11\pi}{6}$
c $\frac{47\pi}{6}$
d $-\frac{\pi}{6}$



13 $\sin\left(-\frac{21\pi}{6}\right)$ est égal à :

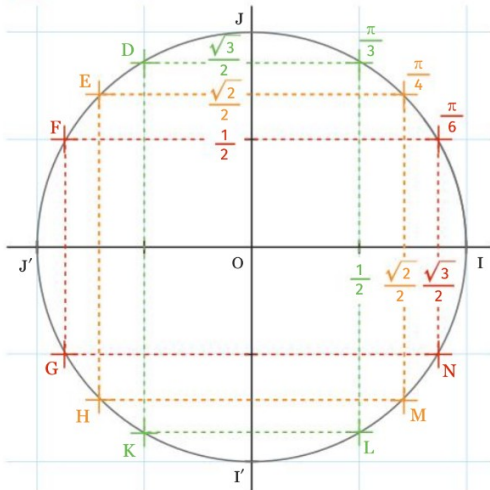
- a** $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
b $\frac{\pi}{2}$
c 1
d -1

14 Dans la figure ci-dessous :



- a** $\widehat{BCA} = 30^\circ$
b $\widehat{BAC} = 30^\circ$
c $BA = 2\sqrt{3}$
d $BA = \sqrt{12}$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{BA}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$



En utilisant le cercle trigonométrique ci-dessus, recopier et compléter le tableau suivant.

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$
Point image	D	E	G	H	I'
$\cos(x)$	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0
$\sin(x)$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1

1 La fonction cosinus est la fonction qui, pour tout $x \in \mathbb{R}$, associe le réel $\cos(x)$. La fonction cosinus est :

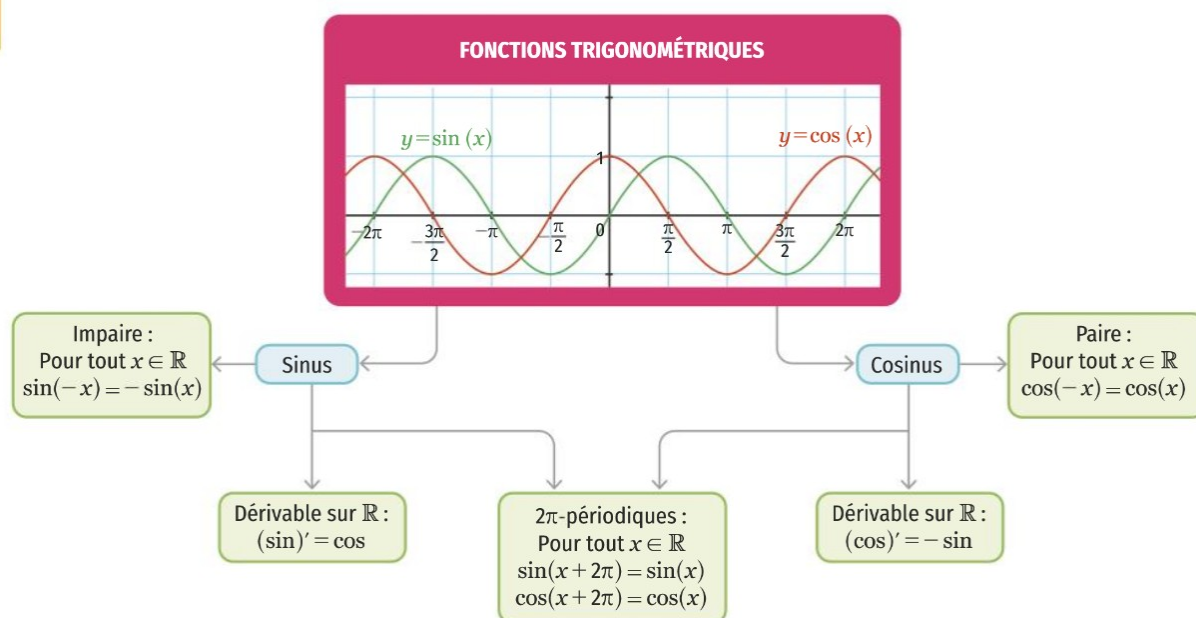
- ✓ paire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$. Dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Cela permet de restreindre l'intervalle d'étude.
- ✓ périodique de période 2π : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, sa courbe représentative est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$. Cela permet de restreindre l'étude à un intervalle de longueur 2π (en général, on choisira l'intervalle $[-\pi; \pi]$).
- ✓ positive sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et négative sur les intervalles $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$ et $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.
- ✓ dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto -\sin(x)$. Par ailleurs, la dérivée de $x \mapsto \cos(ax + b)$ est $x \mapsto -a \sin(ax + b)$ où a et b sont des réels.
- ✓ croissante sur l'intervalle $[-\pi; 0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0; \pi]$.

2 La fonction sinus est la fonction qui, pour tout $x \in \mathbb{R}$, associe le réel $\sin(x)$. La fonction sinus est :

- ✓ impaire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$. Dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère. Cela permet de restreindre l'intervalle d'étude.
- ✓ périodique de période 2π : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, sa courbe représentative est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$. Cela permet de restreindre l'étude à un intervalle de longueur 2π (en général, on choisira l'intervalle $[-\pi; \pi]$).
- ✓ négative sur l'intervalle $[-\pi; 0]$ et positive sur l'intervalle $[0; \pi]$.
- ✓ dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto \cos(x)$. Par ailleurs, la dérivée de $x \mapsto \sin(ax + b)$ est $x \mapsto a \cos(ax + b)$ où a et b sont des réels.
- ✓ décroissante sur l'intervalle $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$, croissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ puis à nouveau décroissante sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

3 Les fonctions cosinus et sinus permettent d'étudier notamment des phénomènes physiques tels que les oscillations et les circuits électriques.

CARTE MENTALE



QCM

réponse unique

7 La fonction cosinus :

- a est paire.
- b est impaire.
- c n'est ni paire ni impaire.
- d est paire et impaire.

8 La fonction sinus :

- a est π -périodique.
- b est 2π -périodique.
- c est 3π -périodique.
- d n'est pas périodique.

9 $\cos(x + 3\pi)$ est égal à :

- a $\cos(x)$
- b $\cos(3\pi)$
- c $\cos(x + \pi)$
- d $\cos(-x)$

10 Pour montrer qu'une fonction est impaire sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que :

- a $f(-x) = -f(x)$ pour un certain $x \in \mathbb{R}$.
- b $f(-x) = f(x)$ pour un certain $x \in \mathbb{R}$.
- c $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- d $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

car $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.

11 La fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ est :

- a dérivable sur $\mathbb{R}$.
- b dérivable sur $]0; \pi[$.
- c dérivable sur $]0; +\infty[$.
- d dérivable sur $] -\infty; 0[$.

car $\forall x \in]0; \pi[, \sin(x) \neq 0$

QCM

réponses multiples

[Une ou plusieurs bonnes réponses par question]

12 Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus :

- a sont des sinusoides.
- b sont des droites.
- c sont invariantes par translation de vecteur $2\pi \vec{i}$.
- d sont invariantes par translation de vecteur $-2\pi \vec{i}$.

13 Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note C_1 la courbe de la fonction cosinus et C_2 celle de la fonction sinus.

- a C_1 et C_2 sont identiques.
- b C_1 et C_2 sont symétriques l'une par rapport à l'autre.
- c C_1 est l'image de C_2 par une translation de vecteur $-\frac{\pi}{2} \vec{i}$.
- d C_1 est l'image de C_2 par une translation de vecteur $6\pi \vec{i}$.

14 La fonction $f: x \mapsto \cos(x) \times \sin(x)$:

- a est paire.
- b est impaire.
- c est périodique.
- d n'est pas périodique.

15 Pour $x \in [0; 2\pi]$, l'inéquation $\sin(x) \leq 0$ est vérifiée pour :

- a $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$
- b $x \in [\pi; 2\pi]$
- c $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$
- d $x \in]\pi; 2\pi[$

16 Une expression de la dérivée de $x \mapsto \cos(2x - 4)$ est :

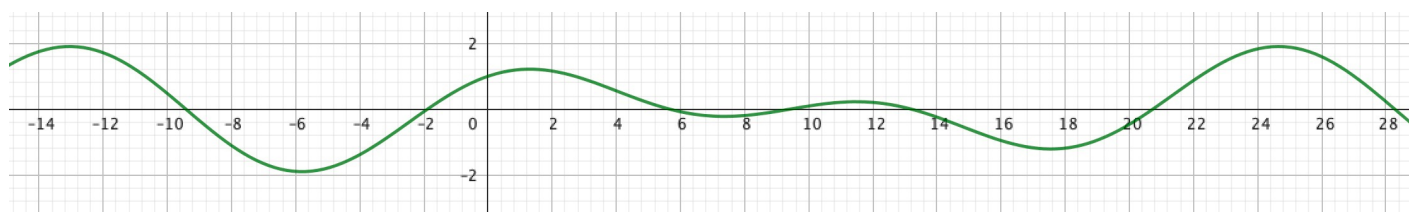
- a $2 \cos(x)$
- b $2 \cos(2x - 4)$
- c $-2 \sin(x)$
- d $-2 \sin(2x - 4)$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right).$$

1. À l'aide de la calculatrice ou de GeoGebra, conjecturer la période de f .

2. Prouver cette conjecture par le calcul.



On conjecture que f est périodique de période 12π .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(x + 12\pi) &= \cos\left(\frac{x}{2} + 6\pi\right) + \sin\left(\frac{x}{3} + 4\pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

car $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont 2π -périodiques

66 [Communiquer.]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
 $(2\cos(x) - \sqrt{2})(\sin^2(x) - 1) = 0$.

67 [Communiquer.]

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation
 $(2\sin(x) - \sqrt{2})(1 - 2\cos(x)) \geq 0$.

68 [Communiquer.]

On considère la fonction $h: x \mapsto \frac{x}{2} + \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Donner le tableau de variations de h sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
3. Pourquoi peut-on connaître les variations de h sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

69 [Chercher.]

Pour chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes, conjecturer la période à l'aide de la calculatrice puis démontrer cette conjecture.

1. $f: x \mapsto \sin^2(2x)$
2. $g: x \mapsto 4\sin(x) \times \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

70 PYTHON [Modéliser.]

Soit y un nombre réel donné. L'algorithme suivant permet de résoudre numériquement l'équation $\sin(x) = y$ avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

```
1 from math import *
2
3 def dichotomie_sin(y, p):
4     if (y > ...) or (y < ...):
5         return(False)
6     else:
7         a = -pi/2
8         b = pi/2
9         while b - a >= p:
10            res = (a + b)/2
11            if sin(res) > y:
12                ... = ...
13            else:
14                ... = ...
15            return(res)
```

On utilise une méthode de dichotomie qui permet de trouver une solution approchée avec une précision donnée (notée p dans le programme).

1. Comment compléter la ligne 4 ?
2. On va chercher à compléter le programme fourni.
 - a. À quoi correspondent les variables a et b ?
 - b. Que teste-t-on ligne 9 ?
 - c. Recopier et compléter alors le programme fourni.

71 [Communiquer.]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
 $f(x) = \sin\left(\frac{x}{a}\right) + \cos\left(\frac{x}{b}\right)$ où a et b sont deux nombres réels quelconques.

On note k le plus petit multiple commun à a et b .

1. Démontrer que $2k\pi$ est une période de f .
2. En déduire alors une période de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{3}\right)$.

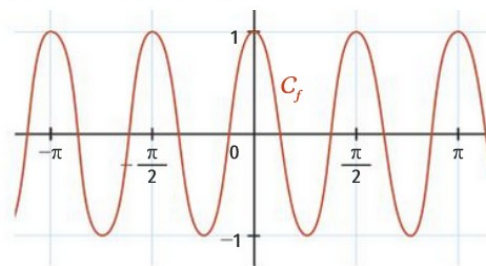
72 [Calculer.]

Le but de ce problème est d'étudier la fonction
 $f: x \mapsto \cos^2(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est-elle paire ? Impaire ? Ni l'un ni l'autre ?
2. Montrer que f est π -périodique.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$.
4. Déterminer les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
5. Cela suffit-il à connaître les variations de f sur tout $\mathbb{R}$?

73 EN PHYSIQUE [Modéliser.]

En physique, les oscillations harmoniques (pendules, ressorts, ondes, etc.) sont décrites par des fonctions de la forme $\cos(\omega t + \phi)$ ou $\sin(\omega t + \phi)$ où ω est appelé pulsation et ϕ est la phase.



1. La courbe ci-dessus représente l'oscillation $f: t \mapsto \cos(4t)$. Déterminer par lecture graphique la période T de ce signal. Vérifier ce résultat par le calcul.
2. Conjecturer une formule reliant la pulsation ω et la période T .
3. Tester cette conjecture sur les oscillations suivantes.
 - a. $g(t) = \cos(6t + 2)$
 - b. $h(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$
4. Démontrer la conjecture.



Pendule de Foucault du Panthéon de Paris.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(2\cos(x) - \sqrt{2})(\sin^2(x) - 1) = 0.$$

$$(2\cos(x) - \sqrt{2})(\sin^2(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(x) - \sqrt{2} = 0 \text{ ou } \sin^2(x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(x) = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \sin^2(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(x) = 1 \text{ ou } \sin(x) = -1$$

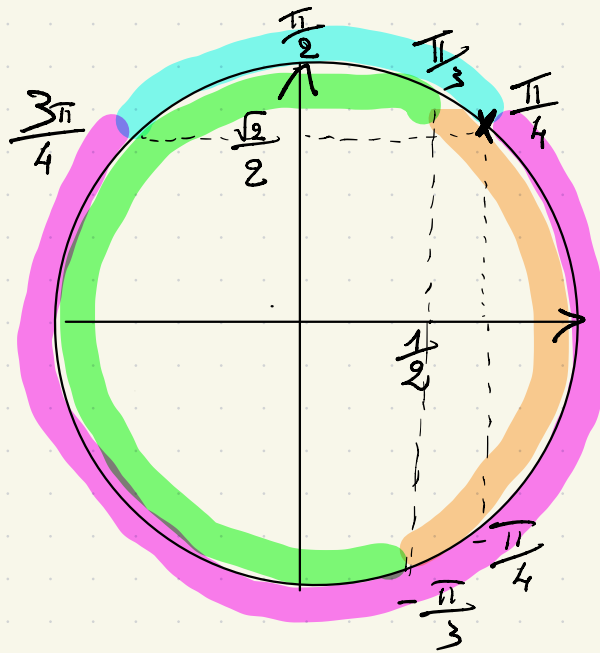
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ ou } \sin(x) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \text{ou } \sin(x) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$Y = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ l'inéquation
 $(2\sin(x) - \sqrt{2})(1 - 2\cos(x)) \geq 0$.

$$(2\sin(x) - \sqrt{2})(1 - 2\cos(x)) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin(x) - \sqrt{2} \geq 0 \text{ et } 1 - 2\cos(x) \geq 0 \\ \text{ou} \\ 2\sin(x) - \sqrt{2} \leq 0 \text{ et } 1 - 2\cos(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \cos(x) \leq \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \cos(x) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\mathcal{S} = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$$

On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{x}{2} + \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Donner le tableau de variations de h sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
3. Pourquoi peut-on connaître les variations de h sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

1) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$$

$$2) \text{ Sur }]-\pi; \pi], h'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{4}$$

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$h'(x)$		$-$	$+$	$-$
h		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

3) Par 2π -périodicité, on en déduit les variations de h sur $\mathbb{R}$.



Pour chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes, conjecturer la période à l'aide de la calculatrice puis démontrer cette conjecture.

1. $f: x \mapsto \sin^2(2x)$

2. $g: x \mapsto 4 \sin(x) \times \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

1) On conjecture que f est $\frac{\pi}{2}$ -périodique.

• $S: x \in \mathbb{R}, x + \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}.$

$$\begin{aligned} \bullet \forall x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin^2\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \left(\sin(2x + \pi)\right)^2 \\ &= \left(-\sin(2x)\right)^2 \\ &= \sin^2(2x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

2) On conjecture que g est 3π -périodique.

• $S: x \in \mathbb{R}, x + 3\pi \in \mathbb{R}.$

$$\begin{aligned} \bullet \forall x \in \mathbb{R}, g(x + 3\pi) &= 4 \sin(x + 3\pi) \times \sin\left(\frac{x + 3\pi}{3}\right) \\ &= 4 \sin(x + \pi) \times \sin\left(\frac{x}{3} + \pi\right) \\ &= 4 \times (-\sin(x)) \times \left(-\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right) \\ &= 4 \sin(x) \sin\left(\frac{x}{3}\right) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

car $x \mapsto \sin(x)$ est 2π -périodique

Soit y un nombre réel donné. L'algorithme suivant permet de résoudre numériquement l'équation $\sin(x) = y$ avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

```

1  from math import*
2
3  def dichotomie_sin(y, p):
4      if(y > ...) or (y < ...):
5          return(False)
6      else:
7          a = -pi/2
8          b = pi/2
9          while b - a >= p:
10             res = (a + b)/2
11             if sin(res) > y:
12                 ... = ...
13             else:
14                 ... = ...
15             return(res)

```

On utilise une méthode de dichotomie qui permet de trouver une solution approchée avec une précision donnée (notée p dans le programme).

1. Comment compléter la ligne 4 ?
2. On va chercher à compléter le programme fourni.
 - a. À quoi correspondent les variables **a** et **b** ?
 - b. Que teste-t-on ligne 9 ?
 - c. Recopier et compléter alors le programme fourni.

1) On complète en notant $\text{if}(y > \pi/2) \text{ or } (y < -\pi/2)$
pour tester si la valeur y se trouve bien dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

2) a) a et b sont les bornes de l'intervalle.

b) On teste si l'amplitude de l'intervalle est supérieure à la précision p .

c)

```

while b - a >= p:
    res = (a + b)/2
    if sin(res) > y:
        a = res
    else:
        b = res
return(res)

```

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(\frac{x}{a}\right) + \cos\left(\frac{x}{b}\right)$ où a et b sont deux nombres réels quelconques.

On note k le plus petit multiple commun à a et b .

1. Démontrer que $2k\pi$ est une période de f .

2. En déduire alors une période de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{3}\right)$.

1) k est le plus petit multiple commun de a et b .

Ainsi il existe p et q des entiers tels que $\begin{cases} k = ap \\ k = bq \end{cases}$

$$\text{Alors : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2k\pi) = \cos\left(\frac{x + 2k\pi}{a}\right) + \sin\left(\frac{x + 2k\pi}{b}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{car } x &\mapsto \cos(x) \text{ et } x \mapsto \sin(x) \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques} \\ &\rightarrow \begin{cases} = \cos\left(\frac{x}{a} + 2p\pi\right) + \sin\left(\frac{x}{b} + 2q\pi\right) \\ = \cos\left(\frac{x}{a}\right) + \sin\left(\frac{x}{b}\right) \\ = f(x) \end{cases} \end{aligned}$$

2) 6 est le plus petit commun multiple de 2 et 3.

Ainsi 6π est une période de g .

Le but de ce problème est d'étudier la fonction

$f: x \mapsto \cos^2(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est-elle paire ? Impaire ? Ni l'un ni l'autre ?
2. Montrer que f est π -périodique.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$.
4. Déterminer les variations de f sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
5. Cela suffit-il à connaître les variations de f sur tout $\mathbb{R}$?

1] $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0

de plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) &= \cos^2(-x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc f est paire

2] Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x + \pi \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{De plus: } \forall x \in \mathbb{R}, f(x + \pi) &= \cos^2(x + \pi) \\ &= (\cos(x + \pi))^2 \\ &= (-\cos(x))^2 \\ &= \cos^2(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc f est π -périodique.

3) f est dérivable en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

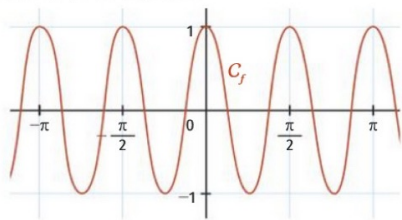
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \times (-\sin(x)) \cos(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2 \sin(x) \cos(x)$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	$\emptyset$	-
f			

5) Par π -périodicité, on en déduit les variations de f sur $\mathbb{R}$.

En physique, les oscillations harmoniques (pendules, ressorts, ondes, etc.) sont décrites par des fonctions de la forme $\cos(\omega t + \phi)$ ou $\sin(\omega t + \phi)$ où ω est appelé pulsation et ϕ est la phase.



1. La courbe ci-dessus représente l'oscillation $f: t \mapsto \cos(4t)$. Déterminer par lecture graphique la période T de ce signal. Vérifier ce résultat par le calcul.

2. Conjecturer une formule reliant la pulsation ω et la période T .

3. Tester cette conjecture sur les oscillations suivantes.

a. $g(t) = \cos(6t + 2)$

b. $h(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

4. Démontrer la conjecture.



Pendule de Foucault du Panthéon de Paris.

1) On conjecture que la période du signal est $T = \frac{\pi}{2}$.

• Si $x \in \mathbb{R}$, $x + T \in \mathbb{R}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= \cos(4x + 2\pi)$

$= \cos(4x)$

$= f(x)$

Donc f est $\frac{\pi}{2}$ -périodique.

2) On conjecture que si: $f: x \mapsto \cos(\omega x + \phi)$, alors
avec $\omega \neq 0$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

3) g est $\frac{\pi}{3}$ -périodique

h est 4π -périodique.

4) • Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x + \frac{2\pi}{\omega} \in \mathbb{R}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi\right) = \cos(\omega x + 2\pi + \phi)$
 $= \cos(\omega x + \phi)$

Donc $x \mapsto \cos(\omega x + \phi)$ est $\frac{2\pi}{\omega}$ -périodique.