

Exercice I.8

Étudier les variations de la fonction h définie par

$$h(x) = (x - 2)\sqrt{x}$$

puis donner l'allure de sa courbe représentative.

Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$h(x) = (x - 2)\sqrt{x}$$

h est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned}\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + (x - 2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x + x - 2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x - 2}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

On a le tableau de signes suivant:

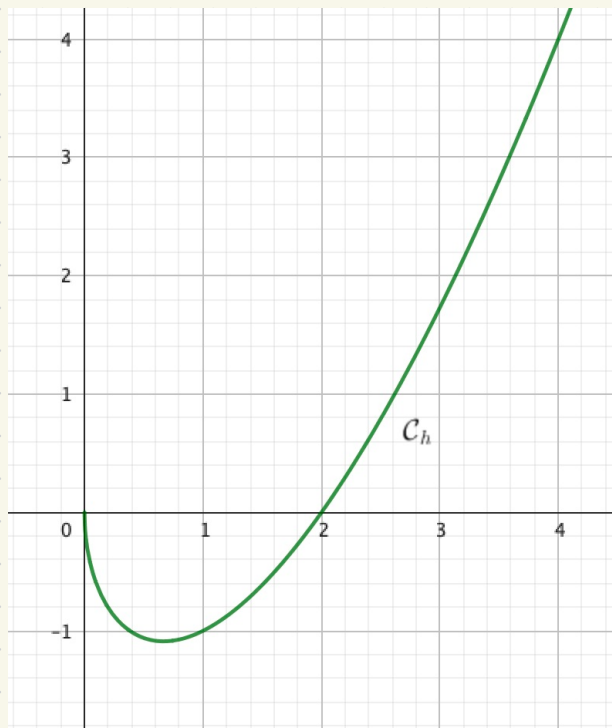
x	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$3x - 2$		-	+
$2\sqrt{x}$	0	+	+
$h'(x)$		-	+

Ainsi la fonction h est décroissante sur $]0; \frac{2}{3}]$

et croissante sur $[\frac{2}{3}; +\infty[$.

h admet un minimum en $\frac{2}{3}$, qui vaut :

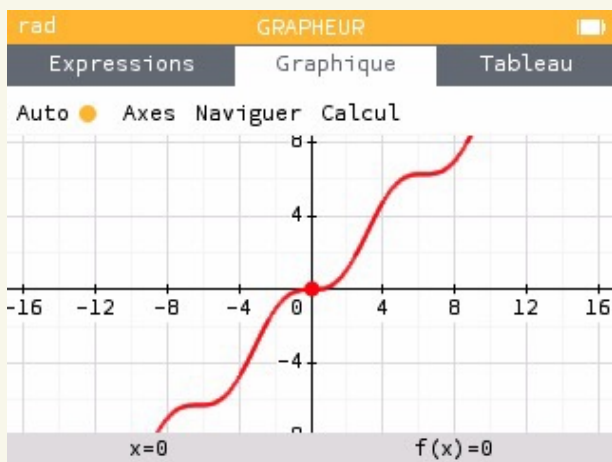
$$\begin{aligned} h\left(\frac{2}{3}\right) &= \left(2 - \frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$



Exercise 1.9

1. Tracer à la calculatrice la courbe représentative de $f : x \mapsto x - \sin x$
2. Conjecturer les variations de f .
3. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) \geq 0$ et que l'équation $f'(x) = 0$ admet une infinité de solutions.
4. Que penser de l'hypothèse dans la propriété :

« si, pour tout x appartenant à un intervalle I , $f'(x) > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I . »
5. Formuler une propriété construite de la même façon que la précédente, avec une hypothèse « plus faible », et une conclusion analogue.



2] On conjecture que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que
différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + \cos(x)$$

$$\text{Or, } \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq 1 + \cos(x) \leq 2$$

En particulier, on a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0.$$

$$\text{Puis } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -1$$

l'ensemble des solutions de cette équation est infini :

$$\mathcal{S} = \{ -\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

Donc $f'(x) = 0$ admet une infinité de solutions.

4) L'hypothèse est "trop forte"; elle est suffisante, mais pas nécessaire.

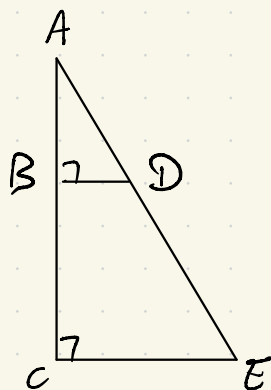
5) Si, pour tout x dans un intervalle I , $f'(x) > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .

Exercice I.11

1) On coupe le cône par un plan perpendiculaire à la base. On obtient la représentation suivante:

On sait que

- les points A, B et C sont alignés.
- les points A, D et E sont alignés.
- (BD) est parallèle à (CE).



Or, d'après le théorème de THALÈS:

$$\frac{r}{8} = \frac{24-h}{24}$$

c'est-à-dire $24r = 8(24-h)$

ou encore $3r = 24-h$

c'est-à-dire $h = 24 - 3r$

2) Le volume $V(r)$ du cylindre est:

$$\begin{aligned} V(r) &= \pi r^2 \times h \\ &= \pi r^2 (24 - 3r) \\ &= -3\pi r^3 + 24\pi r^2 \end{aligned}$$

On cherche à déterminer le maximum de V
 V est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } \forall r \in \mathbb{R}, V'(r) &= -9\pi r^2 + 48\pi r \\ &= \pi r (-9r + 48) \end{aligned}$$

Ainsi, on a le tableau de signes suivant:

r	0	$\frac{16}{3}$	$+\infty$
πr	0	+	+
$-9r+48$	+	0	-
$V'(r)$	0	+	-

Donc V est croissante sur $[0; \frac{16}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{16}{3}; +\infty[$
 V atteint son maximum pour $r = \frac{16}{3}$ cm et $V(\frac{16}{3}) =$