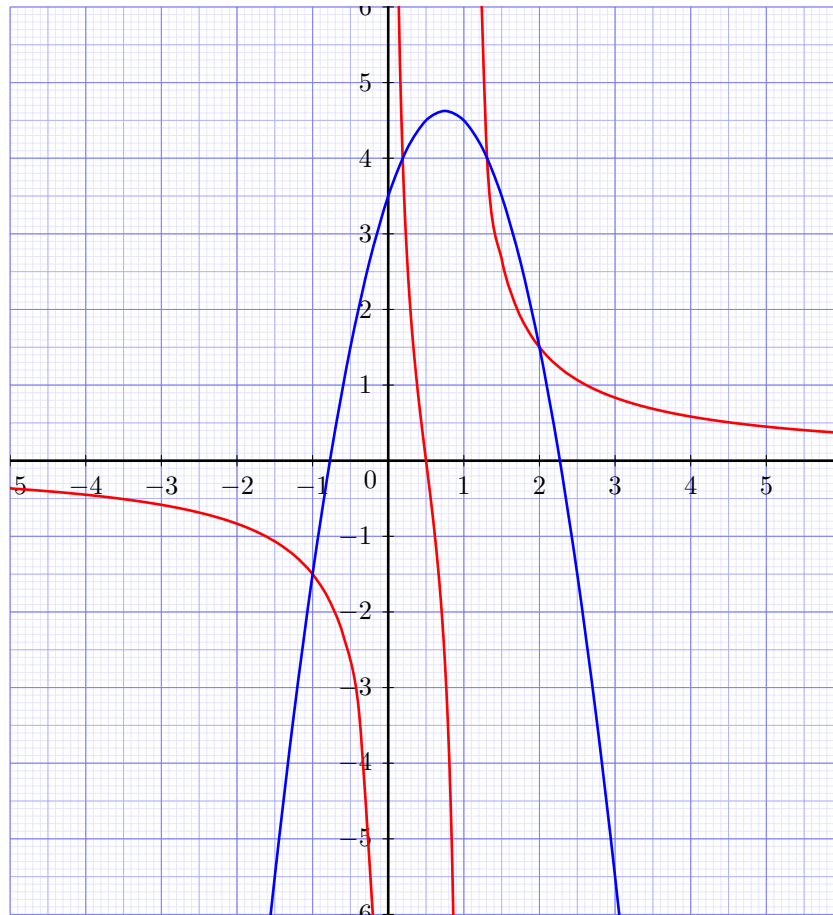


Une première étude de fonction

1. Étude graphique

1. Les courbes représentatives de deux fonctions f et g sont représentées ci-dessous.



- La fonction g est une fonction trinôme du second degré. Identifier sa courbe en justifiant.
 - Quel semble être l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
 - Conjecturer à l'aide du graphique le tableau de variation de f et de g .
 - Quel semble être le maximum de g sur $[-1 ; 3]$?
 - Quel semble être le maximum de f sur $[2 ; +\infty[$? sur $]2 ; +\infty[$?
2. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
- $f(x) = 0$ $f(x) = \frac{3}{2}$ $f(x) = -\frac{11}{2}$ $g(x) = 5$
 - $g(x) > -\frac{11}{2}$ $f(x) \geq 0$ $f(x) < -\frac{3}{2}$
 - $f(x) = g(x)$ $f(x) > g(x)$
3. Discuter en fonction du réel k le nombre de solutions de l'équation $g(x) = k$.
4. Même question avec l'équation $f(x) = k$.

2. Étude algébrique

Soient $f : x \mapsto \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto -2x^2 + 3x + \frac{7}{2}$.

L'objectif de cette partie est de retrouver par le calcul les résultats conjecturés dans la partie précédente.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Quel est le tableau de variations de g ?
3. Retrouver le tableau de variations de f .
4. Résoudre algébriquement les équations et inéquations suivantes :
 - (a) $g(x) = 0$ $g(x) = 5$ $f(x) = 0$
 - (b) $g(x) > 0$ $f(x) < \frac{3}{2}$ $f(x) < 0$
 - (c) $f(x) = g(x)$ $f(x) \leq g(x)$

3. Questions supplémentaires

1. La représentation graphique de la fonction f présente un élément de symétrie. Le démontrer.
2. Tracer en vert sur le graphique la courbe représentative de la fonction $|f|$.

1) f est définie si et seulement si $\begin{cases} x \mapsto x^{-1} \text{ ne s'annule pas} \\ x \mapsto x \text{ ne s'annule pas} \end{cases}$
 si et seulement si $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Donc $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

2) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -4x + 3.$$

Le tableau de signes de g' et de variations de g

est:

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	ϕ	-
Variations de g			

3] f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; 1[$ et sur $] 1; +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur chacun de ces intervalles.

$$\forall x \in] -\infty; 0[\cup] 0; 1[\cup] 1; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} < 0$$

Donc f' est négative sur $] -\infty; 0[\cup] 0; 1[\cup] 1; +\infty[$, ainsi f est décroissante sur chacun de ces intervalles :

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—		—	—
Variations de f	↘		↘	

$$4) f(x) < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} < \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+x-1}{(x-1)x} - \frac{3}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x(x-1)} - \frac{3}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-2-3x(x-1)}{2x(x-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-2-3x^2+3x}{2x(x-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x^2+7x-2}{2x(x-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(3x-1)(x-2)}{2x(x-1)} < 0$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$
-1	-	-	-	-	-	-
$3x-1$	-	-	$\circ$	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	$\circ$	+
$2x$	-	$\circ$	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	$\circ$	+	+
$\frac{-(3x-1)(x-2)}{2x(x-1)}$	-	+	$\circ$	-	+	$\circ$

$$S =]-\infty; 0[\cup]\frac{1}{3}; 1[\cup]2; +\infty[$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} = -2x^2 + 3x + \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x(x-1)} = -2x^2 + 3x + \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = (x^2-x)\left(-2x^2 + 3x + \frac{7}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x)\left(-2x^2 + 3x + \frac{7}{2}\right) - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^4 + 5x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 1 = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Notons $P(x) = -2x^4 + 5x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 1$.

-1 est racine de P . En effet, $P(-1) = -2 - 5 + \frac{1}{2} + \frac{11}{2} + 1 = 0$.

Ainsi on peut écrire P sous la forme

$$P(x) = (x+1)(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} P(x) &= \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \\ &= \alpha x^4 + (\beta + \alpha)x^3 + (\gamma + \beta)x^2 + (\delta + \gamma)x + \delta \end{aligned}$$

Par identification, on obtient:

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta + \alpha = 5 \\ \gamma + \beta = \frac{1}{2} \\ \delta + \gamma = -\frac{11}{2} \\ \delta = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 7 \\ \gamma = -\frac{13}{2} \\ \delta = 1 \end{cases}$$

Ainsi $P(x) = (x+1) \left(-2x^3 + 7x^2 - \frac{13}{2}x + 1 \right)$

Soit $Q(x) = -2x^3 + 7x^2 - \frac{13}{2}x + 1$.

2 est une racine de Q .

En effet:
$$\begin{aligned} Q(2) &= -2 \times 8 + 7 \times 4 - 13 + 1 \\ &= -16 + 28 - 13 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $(a; b; c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ tel que

$$-2x^3 + 7x^2 - \frac{13}{2}x + 1 = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

ou encore $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$
 $= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$

Par identification, on obtient:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b - 2a = 7 \\ c - 2b = -\frac{13}{2} \\ -2c = 1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où $Q(x) = (x-2)\left(-2x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right)$

Donc $P(x) = (x+1)(x-2)\left(-2x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right)$

Déterminons les racines du polynôme $-2x^2 + 3x - \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \Delta &= 9 - 4 \times (-2) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 9 - 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$, donc ce trinôme admet deux racines réelles:

$$\alpha_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{-4} \quad \text{ou} \quad \alpha_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{-4}$$

$$\alpha_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{ou} \quad \alpha_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{Ainsi } Q(x) = (x+1)(x-2)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$

$$\text{Donc } \mathcal{Y} = \left\{ -1; 2; \frac{3+\sqrt{5}}{4}; \frac{3-\sqrt{5}}{4} \right\}$$

$$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} \leq -2x^2 + 3x + \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + 2x^2 - 3x - \frac{7}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x(x-1)} \left(x + x - 1 + \left(2x^2 - 3x - \frac{7}{2} \right) x(x-1) \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x(x-1)} \left(2x-1 + \left(2x^2 - 3x - \frac{7}{2} \right) (x^2 - x) \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x(x-1)} \left(2x-1 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^3 + 3x^2 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x(x-1)} \left(2x^4 - 5x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 1 \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x(x-1)} \left(x+1 \right) (x-2) \left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{4} \right) \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{4} \right) \leq 0$$

où l'on a factorisé le polynôme $2x^4 - 5x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 1$ comme précédemment.

$$\text{On note } S(x) = \frac{1}{x(x-1)} \left(x+1 \right) (x-2) \left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{4} \right) \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{4} \right)$$

$$\mathcal{F} = [-1; 0] \cup \left[\frac{3-\sqrt{5}}{4}; 1\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{4}; 2\right]$$

$$\mathcal{F} = [-1; 0] \cup \left[\frac{3-\sqrt{5}}{4}; 1\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{4}; 2\right]$$

Graphiquement, on conjecture que $\mathcal{C}_f$ admet un centre de symétrie en $I(\frac{1}{2}; 0)$. Montrons-le :

Soit $h \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2} + h\right) + f\left(\frac{1}{2} - h\right) &= \frac{1}{\frac{1}{2} + h - 1} + \frac{1}{\frac{1}{2} - h - 1} \\ &= \frac{1}{h - \frac{1}{2}} + \frac{1}{-h + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{-h + \frac{1}{2} + h - \frac{1}{2}}{(h - \frac{1}{2})(-h + \frac{1}{2})} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\frac{f(\frac{1}{2} + h) + f(\frac{1}{2} - h)}{2} = 0$

Ainsi $\mathcal{C}_f$ admet bien un centre de symétrie en $I(\frac{1}{2}; 0)$.

