

Séquence I – Études de fonctions – généralités

Exercice I.1

Dans chacun des cas suivants,

- Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f , g , $f \circ g$ et $g \circ f$.
- Pour tout $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$ préciser l'expression de $g \circ f(x)$.
- Pour tout $x \in \mathcal{D}_{f \circ g}$, préciser l'expression de $f \circ g(x)$.

— Premier cas : $f : x \mapsto -x^2 - 3x + 4$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$

— Deuxième cas : $f : x \mapsto \frac{3-x}{x-4}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$

Exercice I.2

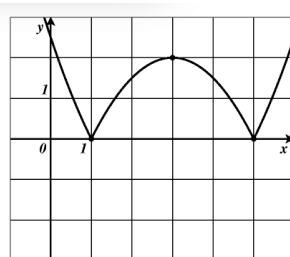
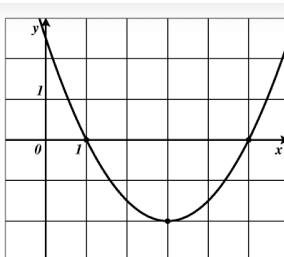
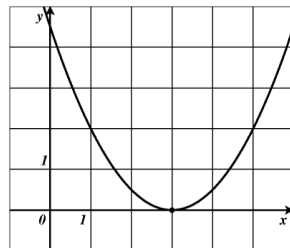
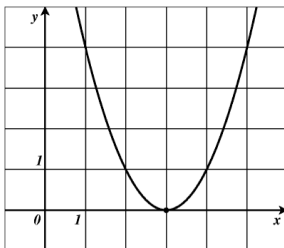
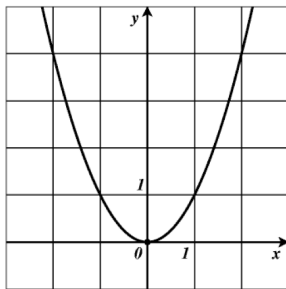
Soit $f : x \mapsto \frac{\cos(3x)}{4 + \sin(1 + x^2)}$.

Étudier la parité de f .

Exercice I.3

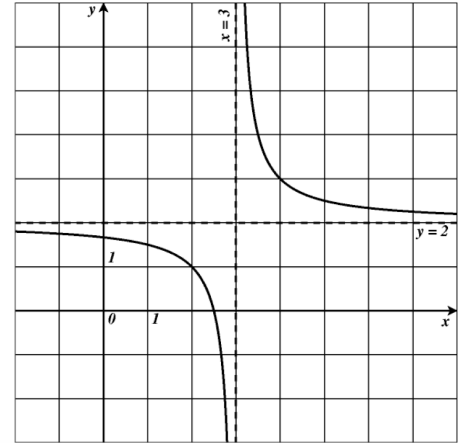
Voici les courbes représentatives de cinq fonctions définies sur $\mathbb{R}$: f , g , h , i et j .

La première fonction f est la fonction carrée. Déterminer l'expression de chacune des quatre autres fonctions, en identifiant la transformation géométrique qui permet d'obtenir sa courbe représentative à partir de celle de f .



Exercice I.4

Déterminer l'expression de la fonction f représentée ci-dessous, sachant qu'elle a été obtenue par transformations successives d'une fonction de référence.



Exercice I.5

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^n$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$.
 - Factoriser les polynômes $x^2 - y^2$ puis $x^3 - y^3$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser le polynôme $x^n - y^n$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. Calculer $\tau_a(h)$ le taux de variation de f entre a et $a + h$.
- Déterminer la limite de $\tau_a(h)$ quand h tend vers 0.
- Que peut-on en déduire ?

Exercice I.6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 12$$

- Étudier les variations de f .
- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle un élément de symétrie ?
- Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$

Exercice I.7

Soit la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 - 2x + 3}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de g ?
2. Quel est l'ensemble de dérivabilité de g ? Donner l'expression de la fonction dérivée.
3. Étudier les variations de g .
4. La courbe C_g admet-elle un élément de symétrie ?
5. Donner l'allure de la courbe C_g .

Exercice I.8

Étudier les variations de la fonction h définie par

$$h(x) = (x - 2)\sqrt{x}$$

puis donner l'allure de sa courbe représentative.

Exercice I.9

1. Tracer à la calculatrice la courbe représentative de $f : x \mapsto x - \sin x$
2. Conjecturer les variations de f .
3. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) \geq 0$ et que l'équation $f'(x) = 0$ admet une infinité de solutions.
4. Que penser de l'hypothèse dans la propriété :
« si, pour tout x appartenant à un intervalle I , $f'(x) > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I . »
5. Formuler une propriété construite de la même façon que la précédente, avec une hypothèse « plus faible », et une conclusion analogue.

Exercice I.10

Problème de la ficelle

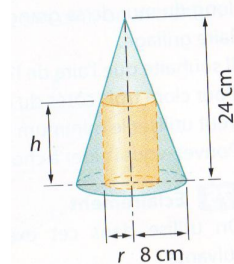
On coupe en deux un fil de longueur ℓ et d'épaisseur négligeable. Avec l'un des morceaux, on forme un cercle et avec l'autre un triangle équilatéral. On note A la somme des aires de ces deux figures.

1. Où couper la ficelle afin que A soit minimale ?
2. Où couper la ficelle afin que A soit maximale ?

Exercice I.11

On considère un cône de révolution de hauteur 24 cm et de rayon de base 8 cm.

On souhaite inscrire dans ce cône un cylindre de révolution de volume le plus grand possible.

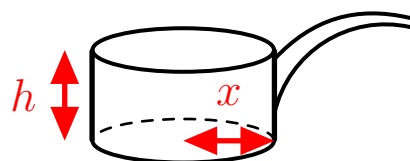


On note r le rayon et h la hauteur d'un cylindre de révolution inscrit dans le cône, en cm.

1. Exprimer h en fonction de r .
2. Exprimer V en fonction de r et résoudre le problème posé.

Exercice I.12

Une casserole est un cylindre droit avec un fond métallique :



on ne tiendra pas compte ici du manche.

On note h la hauteur du cylindre et x son rayon, exprimés en cm. Dans la suite, toutes les casseroles étudiées ont une capacité d'un litre.

1. On étudie d'abord deux cas particuliers :
 - (a) Si le rayon de la casserole est 1 cm, quelle est sa hauteur ? Quelle serait alors l'aire totale de la surface de métal utilisée pour sa fabrication ?
 - (b) Mêmes questions si le rayon de la casserole est 1 m.
 - (c) Laquelle des deux casseroles est la plus économique à fabriquer ?
2. Les formats des casseroles étudiées à la question précédente sont plutôt rares mais ce sont *a priori* deux casseroles possibles, de capacité 1 L qui ne nécessitent pas la même quantité de métal pour leur fabrication. On souhaite dans la suite montrer qu'il existe une casserole de capacité 1 L qui minimise l'utilisation de métal pour sa fabrication et déterminer ses caractéristiques. On note S l'aire totale de la casserole, c'est-à-dire la somme de son aire latérale et de l'aire du fond.
 - (a) Montrer que, pour tout $x > 0$
$$S(x) = \pi x^2 + \frac{2000}{x}$$
 - (b) Démontrer que la fonction S admet un minimum sur $]0 ; +\infty[$ en un réel x_0 dont on précisera la valeur.
 - (c) Montrer que lorsque $x = x_0$, il existe une relation remarquable entre x et h .