

Étude de fonctions

1. Définir et représenter graphiquement une fonction

A. Définition et notation

■ DÉFINITION :

Une **fonction** f est un processus d'association qui, à tout nombre réel x d'un ensemble $\mathcal{D}_f$ associe un unique nombre réel, appelé **image de x par f** et noté $f(x)$.

$\mathcal{D}_f$ s'appelle **l'ensemble de définition** de f .

Exemple :

L'ensemble de définition de la fonction carrée est $\mathbb{R}$.

L'ensemble de définition de la fonction racine carrée est $[0 ; +\infty[$.

Remarque : En pratique, l'ensemble de définition sera souvent un intervalle de $\mathbb{R}$.

Notation : Une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$ à valeurs réelles est notée $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x)$$



Attention

L'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ n'est pas toujours l'**ensemble-image**, c'est-à-dire l'ensemble des images.

On utilise parfois la notation abrégée $f : x \longmapsto f(x)$ ou même $x \longmapsto f(x)$ pour désigner la fonction f . Dans ce cas, l'ensemble de définition n'est pas précisé et sera alors à déterminer.

Exemple :

$$\text{Soit } g : x \longmapsto \frac{1}{2-x}.$$

Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_g$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $2-x=0 \iff x=2$, donc

$$\mathcal{D}_g =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$$

On note aussi $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.



Attention

$f(x)$ n'est pas une fonction. L'expression $f(x)$ désigne l'image du nombre x par f : c'est donc un nombre réel.

En revanche, f et $x \longmapsto f(x)$ désignent la fonction f .

B. Fonctions de référence

Quelques fonctions sont d'un usage si fréquent qu'elles portent un nom. Leurs propriétés sont connues et peuvent être utilisées sans être redémontrées. On les appelle **fonctions de référence** :

— les fonctions polynômes de la forme

$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

où n est un entier naturel et $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des coefficients réels avec $a_n \neq 0$.

— la fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$,

— les fonctions trigonométriques (sinus, cosinus et tangente)

— la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$

C. Opérations sur les fonctions

Par somme, produit, multiplication par un réel et passage à l'inverse de fonctions de référence, on obtient de nouvelles fonctions.

■ DÉFINITION :

Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$ et λ un réel. On définit les fonctions $f+g$, $f \times g$ et λf par :

- Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
- Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Si de plus g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, on peut définir $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ par :

- Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}$.
- Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

■ VOCABULAIRE :

Soient λ et μ deux réels, u et v deux fonctions définies sur le même ensemble de définition $\mathcal{D}$.

La fonction $\lambda u + \mu v$ définie pour tout $x \in \mathcal{D}$ par :

$$(\lambda u + \mu v)(x) = \lambda u(x) + \mu v(x)$$

s'appelle une **combinaison linéaire** des fonctions u et v .

On définit également de nouvelles fonctions par **composition**.

■ DÉFINITION :

Soient deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.

On suppose que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \in \mathcal{D}_g$.

On définit alors **la fonction composée de f suivie de g** , notée $g \circ f$ par :

Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
 $g \circ f$ se lit « g rond f ».

Exemple :

Soient $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Déterminer $\mathcal{D}_{g \circ f}$ puis, pour tout $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$, préciser l'expression de $g \circ f(x)$.

On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$g \circ f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} f(x) \text{ existe} \\ f(x) \in \mathcal{D}_g \end{cases}$
 si et seulement si $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$
 si et seulement si $x^2 \neq 0$
 si et seulement si $x \neq 0$

Donc $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}^*$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{1}{x^2}$$

Exemple :

Soient $f : x \mapsto x - 2$ et $g : x \mapsto x^2$.

Déterminer $\mathcal{D}_{g \circ f}$ puis, pour tout $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$, préciser l'expression de $g \circ f(x)$. Même question pour $f \circ g$. Que remarque-t-on ?

On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. Ainsi $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x - 2) \\ &= (x - 2)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2) \\ &= x^2 - 2 \end{aligned}$$

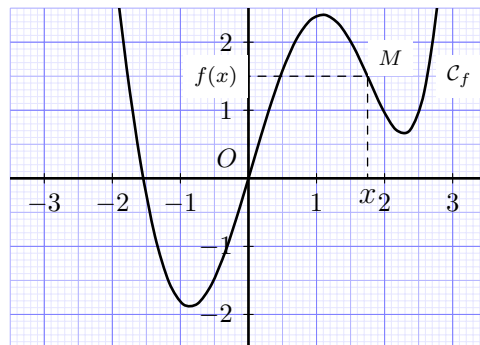
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x) \neq f \circ g(x)$.
 L'« opération » $\circ$ n'est pas **commutative**.

D. Courbe représentative

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction, et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. La courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$ lorsque x parcourt $\mathcal{D}_f$. Elle est notée $\mathcal{C}_f$. Autrement dit,

$$M(x; y) \in \mathcal{C}_f \iff y = f(x)$$



Exemple :

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$$

1. Le point $A(1; 0,5)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?

$$\text{On a } \frac{1}{1^2 + 1} = 0,5 \text{ donc } A \in \mathcal{C}_f$$

2. Le point $B(2; 0,4)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?

$$\text{On a } \frac{1}{2^2 + 1} = \frac{1}{5} \neq 0,4 \text{ donc } B \notin \mathcal{C}_f$$

3. Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ le point $C(-1; a)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?

$$\begin{aligned} C \in \mathcal{C}_f &\iff \frac{1}{(-1)^2 + 1} = a \\ &\iff a = f(-1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc C appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

4. Pour quelle(s) valeur(s) de $b \in \mathbb{R}$ le point $D(b; 1)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?

$$\begin{aligned} D \in \mathcal{C}_f &\iff \frac{1}{b^2 + 1} = 1 \\ &\iff b^2 + 1 = 1 \\ &\iff b^2 = 0 \\ &\iff b = 0 \end{aligned}$$

Donc D appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $b = 0$.

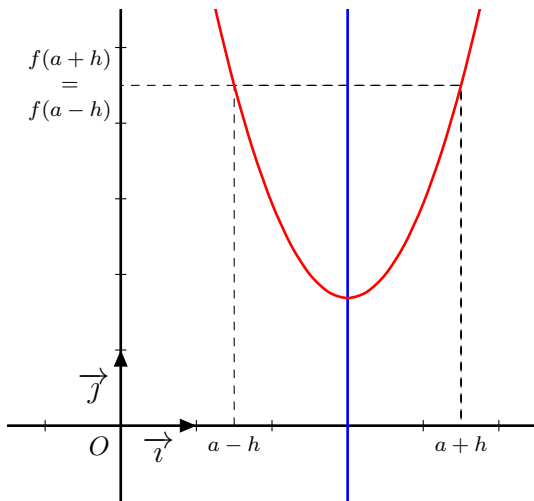
■ **PROPRIÉTÉ** : Symétrie axiale d'une courbe représentative

Soient f une fonction et a et b deux réels.

Si, pour tout réel h tel que $a + h$ et $a - h$ sont dans $\mathcal{D}_f$,

$$f(a + h) = f(a - h)$$

alors la droite d'équation $x = a$ est **un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$** .

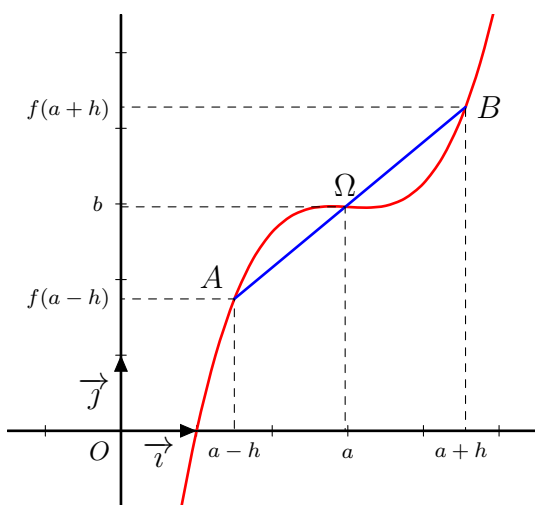


■ **PROPRIÉTÉ** : Symétrie centrale d'une courbe représentative

Soient f une fonction et a et b deux réels. Si, pour tout réel h tel que $a + h$ et $a - h$ sont dans $\mathcal{D}_f$,

$$\frac{f(a - h) + f(a + h)}{2} = b$$

alors le point $\Omega(a ; b)$ est **un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$** .



2. Parité, périodicité des fonctions

A. Fonctions paires

■ DÉFINITION :

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{D}$ est **symétrique par rapport à 0** si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$.

Exemple :

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont symétriques par rapport à 0 ?

$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^*$ $[-5 ; 4]$ $[-5 ; 5[$ $[-5 ; 5]$
 $] -3 ; -2] \cup [2 ; 3]$
 $] -3 ; -2] \cup [2 ; 3]$ $] -3 ; -2] \cup [2 ; 3]$

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. On dit que la fonction f est **paire** si $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et si

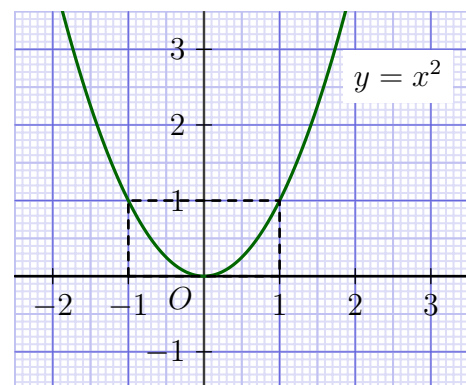
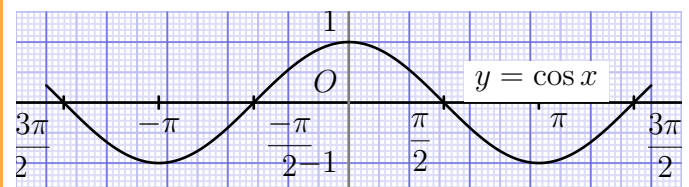
$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = f(x)$$

■ PROPRIÉTÉ :

Les courbes représentatives des fonctions paires sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple :

La fonction cosinus et la fonction carrée sont paires.



En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $(-x)^2 = x^2$.

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est-elle paire ?

On sait que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$, donc la fonction valeur absolue est paire.

B. Fonctions impaires

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. On dit que la fonction f est **impair** si $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et si

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = -f(x)$$

■ PROPRIÉTÉ :

Les courbes représentatives des fonctions impaires sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

Exemple :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Quelle est la parité de la fonction $f : x \mapsto x^n$?

- Si n est pair, $(-x)^n = x^n$, donc f est paire.
- Si n est impair, $(-x)^n = -x^n$, donc f est impaire.

Remarque : Les mots paire et impaire viennent justement de cette propriété !

2. Quelle est la parité de la fonction sinus ?

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, donc la fonction sinus est impaire.

3. Quelle est la parité de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$?

Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(-x) = -\tan(x)$.

Donc la fonction tan est impaire sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

C. Fonctions périodiques

■ DÉFINITION :

Soient f une fonction définie sur un ensemble I et T un nombre réel strictement positif. On dit que f est **périodique de période T** si, pour tout $x \in I$, $x + T \in I$ et $f(x + T) = f(x)$.

Exemple :

Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus sont périodiques de période 2π .

Ces fonctions sont-elles π -périodiques ?

$\cos(0 + \pi) \neq \cos(0)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) \neq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donc ces fonctions ne sont pas π -périodiques.

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto 1$ est-elle périodique ?

Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$. Ainsi

$$\forall (x; T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \quad f(x + T) = f(x)$$

Donc la fonction f est périodique de période T , où T est un réel non nul quelconque.

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto \cos(3x + 2)$ est-elle périodique ?

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \cos(3(x + 2\pi) + 2) \\ &= \cos(3x + 6\pi + 2) \\ &= \cos(3x + 4\pi + 2) \\ &= \cos(3x + 2\pi + 2) \\ &= \cos(3x + 2) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc f est périodique de période 2π .

Quelle est sa plus petite période ?

On cherche la plus petite valeur de T telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3(x + T) + 2) = \cos(3x + 2)$

Cette équation est équivalente à, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(3x + 3T + 2) = \cos(3x + 2)$$

c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 3x + 3T + 2 &= 3x + 2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } 3x + 3T + 2 &= -3x - 2 + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} 3T + 2 &= 2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } 3T + 2 &= -2 + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Si $3T + 2 = 2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, alors $3T = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire $T = \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

La plus petite valeur de T strictement positive est obtenue pour $k = 1$, et $T = \frac{2\pi}{3}$.

- $3T + 2 = -2 + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$ alors $T = \frac{-4 + 2k'\pi}{3}$. La plus petite valeur de T strictement positive est obtenue pour $k' = 1$, et $T = \frac{-4 + 2\pi}{3}$.

Vérifions les résultats :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 2\right) \\ &= \cos(3x + 2\pi + 2) \\ &= \cos(3x + 2) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

■ PROPRIÉTÉ :

Une fonction est périodique de période T si et seulement si sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est invariante par la translation de vecteur $T \vec{i}$.

3. Dérivabilité

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur un intervalle I **ouvert** de $\mathbb{R}$.

A. Nombre dérivé et tangente

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert et $a \in I$.

On dit que f est **dérivable** en a si le **taux d'accroissement de f entre a et $a + h$** admet une limite finie quand h tend vers 0, c'est-à-dire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe et est un nombre réel.}$$

Dans ce cas, la limite est notée $f'(a)$ et appelée **nombre dérivé de f en a** .

Notation : On note $\tau_a(h)$ le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$.

Ainsi τ_a est la fonction définie pour tout $h \neq 0$ par :

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto x^2$. Montrer que la fonction f est dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est $2a$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. Alors

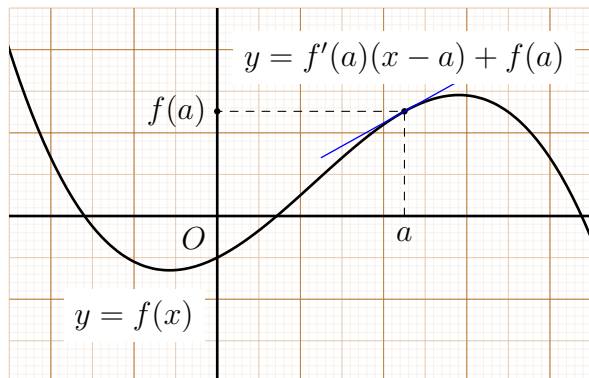
$$\begin{aligned} \tau_a(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{(a+h+a)(a+h-a)}{h} \\ &= \frac{(2a+h) \times h}{h} \\ &= 2a+h \end{aligned}$$

Ainsi, la limite recherchée existe et est $\lim_{h \rightarrow 0} (2a+h) = 2a$. On a donc montré que f est dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est $2a$.

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction dérivable en a .

On appelle **tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a** la droite passant par le point $A(a ; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.



Remarque : Soit $h \neq 0$. On considère les deux points de $\mathcal{C}_f$, $A(a ; f(a))$ et $M(a + h ; f(a + h))$. Alors

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} \\ &= \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}.\end{aligned}$$

Le taux d'accroissement entre a et $a + h$, $\tau_a(h)$ est donc le coefficient directeur de la sécante (AM) à $\mathcal{C}_f$. Quand h tend vers 0, le point M se rapproche du point A .

La sécante (AM) à la courbe $\mathcal{C}_f$ se rapproche d'une position limite, appelée la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A .

De plus, on sait que $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = f'(a)$.

La valeur limite $f'(a)$ est le coefficient directeur de cette droite limite.

■ PROPRIÉTÉ :

Si f est dérivable en a , la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en $A(a ; f(a))$ d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple :

Soit $\mathcal{C}$ la parabole représentant la fonction carrée dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en a .

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = 2a(x - a) + a^2$$

$$y = 2ax - 2a^2 + a^2$$

$$y = 2ax - a^2$$

2. $\mathcal{C}$ admet-elle une tangente passant par le point $B(1 ; -1)$?

$\mathcal{C}$ admet une tangente passant par le point $B(1 ; -1)$ si et seulement s'il existe une valeur de a solution de $-1 = 2a - a^2$.

On résout cette équation d'inconnue a .

$$-1 = 2a - a^2 \iff a^2 - 2a - 1 = 0$$

Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = 8 = (2\sqrt{2})^2$$

donc cette équation admet deux solutions

$$a_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\text{et } a_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Ainsi $\mathcal{C}$ admet deux tangentes passant par le point $B(1 ; -1)$, qui sont les tangentes en $1 - \sqrt{2}$ et en $1 + \sqrt{2}$.

■ DÉFINITION :

On dit que f est **dérivable sur l'intervalle (ouvert) I** si f est dérivable pour tout $a \in I$.

On appelle alors **fonction dérivée de f** la fonction notée f' et définie par :

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto f'(a) \end{aligned}$$

Remarque : Si f est dérivable sur chaque intervalle d'une réunion d'intervalles ouverts D , alors on dit que f est dérivable sur D .

Exemple :

Soit f la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Vérifier que pour tout $a \neq 0$ et tout $h \neq 0$ tels que $a + h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}.$$

On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vérifions l'égalité demandée pour $a \in \mathcal{D}_f$. Pour tout $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{\frac{a - a - h}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} \\ &= -\frac{1}{a(a+h)} \text{ puisque } h \neq 0 \end{aligned}$$

2. En déduire que la fonction f est dérivable en tout $a \neq 0$ et préciser son nombre dérivé en a et ainsi que la fonction dérivée de f .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}.$$

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Remarque : Si f est définie sur un intervalle fermé $[a ; b]$ ou semi-ouvert $[a ; b[$ ou $]a ; b]$, on étudie d'abord la dérivabilité de f sur l'intervalle ouvert $]a ; b[$. On étudie ensuite spécifiquement la limite du taux d'accroissement de f en chacune des bornes concernées.

Si l'intervalle est fermé en a , on étudie la limite du taux d'accroissement de f à droite de a . Si cette limite est un nombre réel, on dit que f est **dérivable à droite** de a . $\mathcal{C}_f$ admet alors une demi-tangente en a , de coefficient directeur la limite à droite trouvée.

On définit de même **la dérivabilité de f à gauche** en b .

Exemple :

On considère la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Vérifier que pour tout $a \geq 0$ et pour tout réel $h \neq 0$ tel que $a + h > 0$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}.$$

On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+ = [0 ; +\infty[$.

Montrons que f est dérivable en $a \in]0 ; +\infty[$.
Pour tout $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \text{ car } h \neq 0 \end{aligned}$$

C. Opérations sur les fonctions dérivées

■ PROPRIÉTÉ :

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et u et v deux fonctions dérivables sur I . Alors :

- $u + v$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- $u \times v$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

- Cas particulier : λu est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(\lambda u)'(x) = \lambda(u'(x))$$

- si de plus, pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$$

- si de même, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

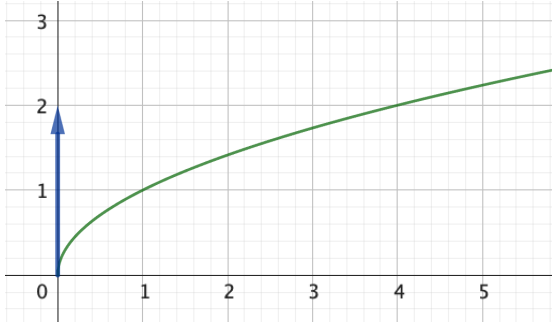
La conséquence suivante est utile dans les justifications de dérivabilité.

2. En déduire que la fonction racine carrée est dérivable en tout $a > 0$ et préciser son nombre dérivé en a .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

$$\text{Donc } f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

3. Que se passe-t-il dans le cas $a = 0$?



Revenons au taux d'accroissement : on cherche $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$. On dira alors que la courbe représentative de f admet en 0 une **tangente verticale**.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 4]$ par

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Étudier la dérivabilité de f .

Montrons que f est dérivable en $a \in [0 ; 4]$.

Pour tout $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(a+h)^2 - 2(a+h) - 3 - (a^2 - 2a - 3)}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 2a - 2h - 3 - a^2 + 2a + 3}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2 - 2h}{h} \\ &= \frac{h(2a + h - 2)}{h} \\ &= 2a + h - 2 \text{ car } h \neq 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h - 2) = 2a - 2.$$

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a - 2$.

B. Dérivées des fonctions de référence

Les dérivées des fonctions de référence seront utilisées pour calculer les dérivées d'autres fonctions, construites à partir de celles-ci, par des opérations algébriques (addition, multiplication...) ou par composition. Elles sont à connaître par cœur.

Fonction	Définie sur	Dérivée	Dérivable sur
$x \mapsto k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto mx + p$ où $(m; p) \in \mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto m$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

■ PROPRIÉTÉ :

Soient $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ et u et v deux fonctions dérivables sur I . Alors, la combinaison linéaire $\lambda u + \mu v$ est dérivable et pour tout $x \in I$:

$$(\lambda u + \mu v)'(x) = \lambda u'(x) + \mu v'(x).$$

Exemple :

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer, en justifiant, l'ensemble de dérivabilité puis l'expression de la fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto \frac{2x^2}{3} - \frac{4}{x}$

f est dérivable pour tout x réel non nul, donc l'ensemble de dérivabilité de f est

$\mathcal{D}_1 =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$. Alors

$$\forall x \in \mathcal{D}_1, f'(x) = \frac{4x}{3} + \frac{4}{x^2}$$

2. $\tan : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$

f est dérivable pour tout x réel tels que $\cos(x) \neq 0$, donc l'ensemble de dérivabilité de $\tan$ est $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}_2, \tan'(x) &= \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \end{aligned}$$

D. Dérivation des fonctions composées

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in I, f(x) \in J$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

Exemple :

Déterminer, en justifiant, l'ensemble de dérivabilité et la fonction dérivée de $h : x \mapsto \sqrt{4x-3}$.

Soient $g : x \mapsto \sqrt{x}$ et $f : x \mapsto 4x-3$.

L'ensemble de dérivabilité de h est l'ensemble des réels x tels que f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$. Or, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et g est dérivable sur $]0; +\infty[$, donc il faut que $f(x) \in]0; +\infty[$, c'est-à-dire $4x-3 > 0$, ou encore $x > \frac{3}{4}$.

Donc l'ensemble de dérivabilité de $h = g \circ f$ est

$$\left] \frac{3}{4}; +\infty \right[$$

On peut ensuite appliquer la propriété précédente :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left] \frac{3}{4}; +\infty \right[, h'(x) &= 4 \times \frac{1}{2\sqrt{4x-3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4x-3}} \end{aligned}$$

Les cas particuliers suivants sont des conséquences de la propriété sur la dérivation des fonctions composées :

■ PROPRIÉTÉ :

Soit u une fonction dérivable sur I .

- Pour tout entier $n > 0$, u^n est dérivable sur I et

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

- $\sin(u)$ est dérivable sur I et

$$(\sin(u))' = u' \times \cos(u)$$

- $\cos(u)$ est dérivable sur I et

$$(\cos(u))' = u' \times (-\sin(u))$$

Et on retrouve deux formules déjà vues :

- si u est strictement positive sur I , $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

- si u ne s'annule pas sur I , $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = u' \times \left(-\frac{1}{u^2}\right)$$

Exemple :

Déterminer, en justifiant, l'ensemble de dérivabilité et la fonction dérivée de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x - 6}$.

Il faut que $x^2 - x - 6 \neq 0$, c'est-à-dire il ne faut pas que $x^2 - x - 6 = 0$, c'est-à-dire il ne faut pas que $(x+2)(x-3) = 0$, c'est-à-dire il ne faut pas que $x = -2$ ou $x = 3$.

Donc l'ensemble de définition de f est

$$\mathcal{D} =]-\infty; -2[\cup]-2; 3[\cup]3; +\infty[$$

Or une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition. En appliquant le cinquième point de la propriété précédente, on obtient :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = -\frac{2x-1}{(x^2-x-6)^2}$$

4. Variations d'une fonction

A. Croissance, décroissance, monotonie

■ DÉFINITION : Monotonie au sens large

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est **croissante** sur I si

$$\forall(a ; b) \in I^2, \quad a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$$

On dit que f est **décroissante** sur I si

$$\forall(a ; b) \in I^2, \quad a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$$

On dit que f est **monotone** sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I

■ DÉFINITION : Monotonie stricte

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est **strictement croissante** sur I si

$$\forall(a ; b) \in I^2, \quad a < b \implies f(a) < f(b)$$

On dit que f est **strictement décroissante** sur I si

$$\forall(a ; b) \in I^2, \quad a < b \implies f(a) > f(b)$$

On dit que f est **strictement monotone** sur I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I

Exemple :

Démontrer en utilisant la définition que la fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit $f : x \mapsto x^3$. Soit $(a ; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Alors

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= b^3 - a^3 \\ &= (b - a)(b^2 + ab + a^2) \\ &= (b - a)\left(b^2 + 2\frac{ab}{2} + a^2\right) \\ &= (b - a)\left(\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a^2\right) \\ &= (b - a)\left(\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2\right) \end{aligned}$$

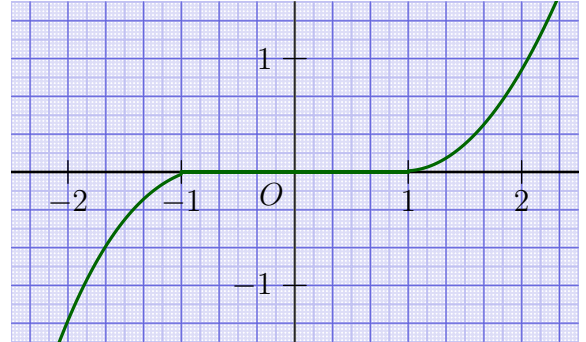
Or, $a < b$, donc $b - a > 0$. De plus, $\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 \geq 0$ et $\frac{3}{4}a^2 \geq 0$. Donc $f(b) - f(a) \geq 0$, donc $f(b) \geq f(a)$, et donc la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple :

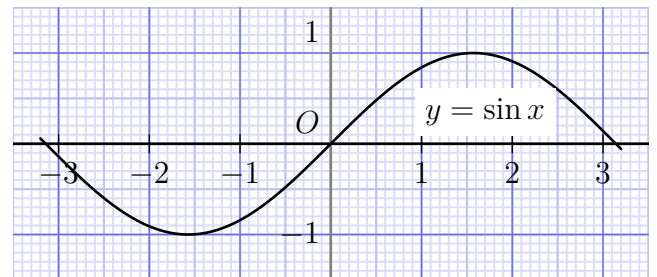
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

f est croissante mais pas strictement croissante.



Exemple :



La fonction sinus n'est pas croissante sur $I = [-\pi; \pi]$ car $-\pi < -\frac{\pi}{2}$

mais $\sin(-\pi) > \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ car $0 > -1$.

Elle n'est pas non plus décroissante sur $I = [-\pi; \pi]$ car $-\frac{\pi}{2} < 0$ mais $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) < \sin(0)$ car $-1 < 0$.

La fonction sinus n'est donc ni croissante, ni décroissante sur $I = [-\pi; \pi]$: elle est non monotone sur I .

En revanche, la fonction sinus est strictement croissante sur $J = \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ et strictement décroissante sur $K = \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

■ **PROPRIÉTÉ** : Composition de fonctions croissantes (respectivement décroissantes)

La composée de deux fonctions croissantes est croissante.

La composée de deux fonctions décroissantes est croissante.

Démonstration de la deuxième propriété. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ où I et J sont deux intervalles et pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$. On suppose que f et g sont décroissantes. Montrons que $g \circ f$ est croissante. Soient $(a ; b) \in I^2$ tels que $a < b$.

f est décroissante donc $a < b \implies f(a) \geq f(b)$.

De plus, $f(a) \in J$ et $f(b) \in J$ et on sait que g est décroissante sur J .

Ainsi, $g(f(a)) \leq g(f(b))$.

On a bien $a < b \implies g \circ f(a) \leq g \circ f(b)$, ce qui signifie que $g \circ f$ est croissante sur I . □

Exemple :

La somme de deux fonctions croissantes est croissante.

Exemple :

La somme de deux fonctions décroissantes est décroissante.

Exemple :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f est une fonction croissante, la fonction λf est-elle croissante ?

Cette propriété est vraie pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Donnons un contre-exemple pour le cas général :

Soit $f : x \mapsto x$ et $\lambda = -1$. Alors f est une fonction croissante et $\lambda f : x \mapsto -x$ est une fonction décroissante. Donc la fonction λf n'est pas croissante.

Exemple :

Le produit de deux fonctions croissantes est-il une fonction croissante ?

La réponse est non, cela dépend du signe. Donnons un contre-exemple :

Soit $f : x \mapsto x^2$ sur $]0 ; +\infty[$ et $g : x \mapsto -\frac{1}{x}$. Alors f et g sont deux fonctions croissantes sur $]0 ; +\infty[$ et $f \times g : x \mapsto -x$ est une fonction décroissante. Donc la fonction $f \times g$ n'est pas croissante.

B. Sens de variation d'une fonction dérivable

Le sens de variation d'une fonction f dérivable sur un **intervalle** I est **caractérisé** par le signe de la dérivée de f sur I .

■ PROPRIÉTÉ :

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I .

- f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.
- f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
- si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $] - 2 ; 0[\cup] 0 ; 2[$ par

$$f : x \mapsto x + \frac{4}{x}$$

Justifier que f est dérivable sur $] - 2 ; 0[$ et sur $] 0 ; 2[$.
 f est la somme de deux fonctions définies et dérivables sur $] - 2 ; 0[$ et sur $] 0 ; 2[$. Donc f est dérivable sur $] - 2 ; 0[$ et sur $] 0 ; 2[$.

Montrer que pour tout $x \in] - 2 ; 0[\cup] 0 ; 2[$, $f'(x) < 0$.
Pour tout $x \in] - 2 ; 0[\cup] 0 ; 2[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 4}{x^2} \\ &= \frac{(x - 2)(x + 2)}{x^2} \end{aligned}$$

On a le tableau de signes suivant :

x	-2	0	2
$x - 2$	$-$		$-$
$x + 2$	$+$		$+$
x^2	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$		$-$

Donc pour tout $x \in] - 2 ; 0[\cup] 0 ; 2[$, $f'(x) < 0$.
 f est-elle décroissante ?

La fonction f est décroissante sur $] - 2 ; 0[$ et sur $] 0 ; 2[$, mais n'est pas décroissante sur $] - 2 ; 0[\cup] 0 ; 2[$.

Remarque : L'hypothèse « f' s'annule au plus en un nombre fini de valeurs » est suffisante mais pas nécessaire. On verra un exemple en exercice.

C. Maximum, minimum, majorant, minorant

■ DÉFINITION : Maximum et minimum

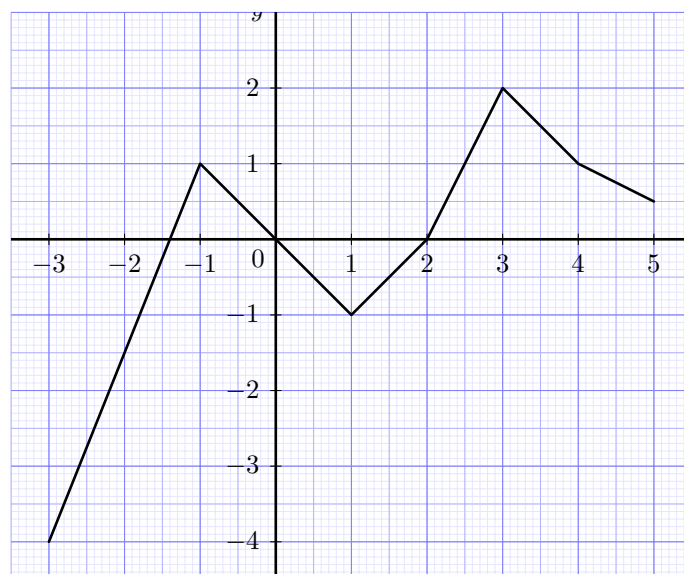
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

f admet un **maximum** en a sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$.

f admet un **minimum** en a sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $[-3 ; 5]$ et dont la courbe représentative est donnée ci dessous.



f admet sur $[-3 ; 5]$ un maximum en 3 qui vaut 2 .

f admet sur $[-3 ; 5]$ un minimum en -3 qui vaut -4 .

f admet sur $[-2 ; 0]$ un maximum en -1 qui vaut 1 .

f admet sur $[0 ; 2]$ un minimum en 1 qui vaut -1 .

f admet-elle un minimum sur $] - 3 ; 5]$? **Non**

La notion de maximum ou de minimum (d'**extremum**) n'a de sens que relativement à un intervalle.

■ DÉFINITION : Extremum local

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

On dit que f admet un **maximum** local en a s'il existe un intervalle ouvert J tel que, pour tout $x \in I \cap J$,

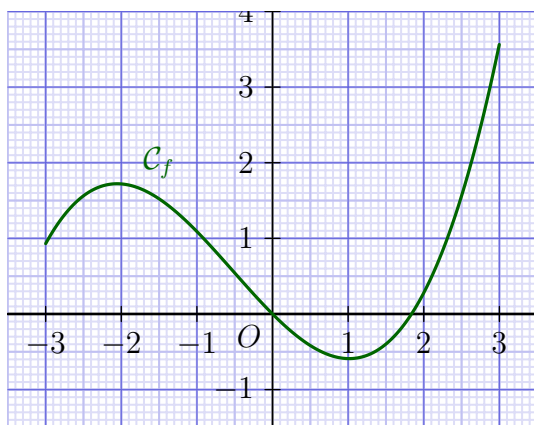
$$f(x) \leq f(a)$$

On dit que f admet un **minimum** local en a s'il existe un intervalle ouvert J tel que, pour tout $x \in I \cap J$

$$f(x) \geq f(a)$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $I = [-3 ; 3]$ dont la courbe représentative est la suivante :



- Soit $J =]-4 ; -2[$. Alors $I \cap J = [-3 ; -2[$. Pour tout $x \in I \cap J$, on a $f(x) \geq f(-3)$. f admet un minimum local en -3 .
- f admet un maximum local en -2 .

Si f est dérivable, l'étude du signe de f' peut permettre d'identifier des extrema locaux.

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I **ouvert** et $a \in I$.

Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en a .

Si f' s'annule en a **sans changer de signe**, alors il n'y a pas d'extremum local en a .

Exemple :

- La dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ $f : x \mapsto x^2 + 3$ est $x \mapsto 2x$. Elle s'annule en changeant de signe en $x = 0$. f est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

f admet un minimum local égal à 3 en $x = 0$.

- La dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto x^3$ est $x \mapsto 3x^2$. Elle s'annule en 0 sans changer de signe. Il n'y a pas d'extremum local en 0.

Remarque : Attention aux bornes dans le cas d'un intervalle fermé ! Ces propriétés s'appliquant sur un intervalle ouvert. Si on est sur une des deux bornes d'un intervalle, la propriété est fausse. En effet, la dérivée de la fonction affine définie pour tout x de $[-2; 2]$ par $h(x) = 3x + 1$ est $x \mapsto 3$. Elle ne s'annule pas sur $[-2; 2]$. Néanmoins, h admet un minimum égal à -5 en $x = -2$ et un maximum égal à 7 en $x = 2$.

■ DÉFINITION : Majorant, minorant

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , m et M deux réels.

- M est **un** majorant de f si, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \leq M$$

- m est **un** minorant de f si, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \geq m$$

Si f admet **un majorant**, alors on dit que f est majorée.

f est **minorée** s'il existe un minorant de f .

f est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, f est minorée. 3 est le minimum et un minorant de f . 0 et $-\sqrt{2}$ sont aussi des minorants de f .

g n'est ni majorée, ni minorée.

La fonction cosinus est bornée : elle est majorée par 1 et minorée par -1 .

5. Convexité, concavité

A. Définitions

■ DÉFINITION : Convexité

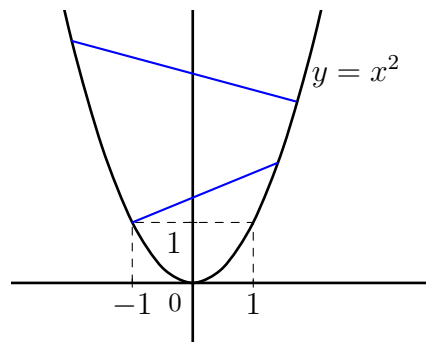
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Une **corde** de $\mathcal{C}_f$ est un segment qui relie deux points de $\mathcal{C}_f$.

- f est **convexe** sur I si sa courbe représentative est située en dessous de chacune de ses cordes.
- f est **concave** sur I si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses cordes.

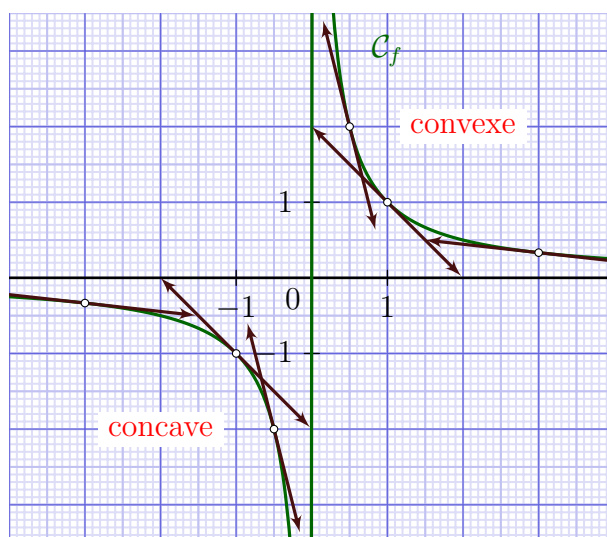
Exemple :

La fonction carrée $x \mapsto x^2$ est convexe.



Exemple :

La fonction inverse est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et concave sur $\mathbb{R}_-^*$.



■ PROPRIÉTÉ :

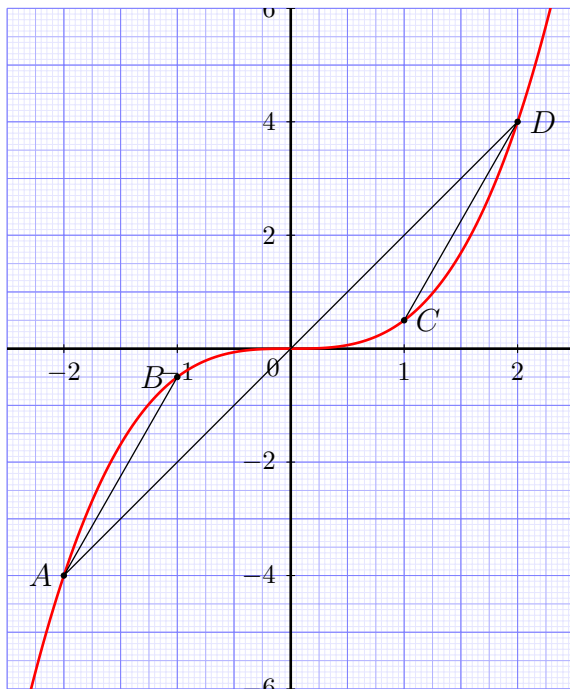
Si f est une fonction convexe, $-f$ est une fonction concave.

Exemple :

La fonction $x \mapsto -x^2$ est **concave**.

Exemple :

La fonction $x \mapsto x^3$ n'est ni convexe ni concave sur $I = \mathbb{R}$.



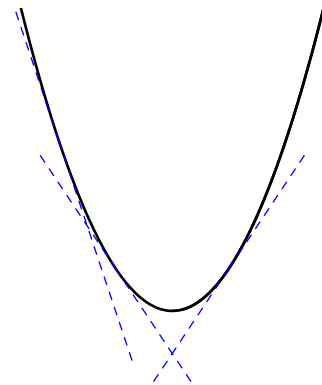
La corde $[AB]$ est sous $\mathcal{C}$, $[CD]$ est au-dessus de $\mathcal{C}$ et $[AD]$ coupe $\mathcal{C}$.

La convexité d'une fonction dérivable est caractérisée par le sens de variation de sa dérivée.

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- f est **convexe** si et seulement si f' est croissante. $\mathcal{C}_f$ est alors au-dessus de chacune de ses tangentes.
- f est **concave** si et seulement si f' est décroissante. $\mathcal{C}_f$ est alors en dessous de chacune de ses tangentes.



Par conséquent, la convexité d'une fonction **deux fois dérivable** est caractérisée par le signe de sa **dérivée seconde**.

■ PROPRIÉTÉ :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I .

- f est **convexe** sur I si et seulement si f'' est positive sur I .
- f est **concave** sur I si et seulement si f'' est négative sur I .

Exemple :

Étudier la convexité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^5 - 5x^4$.

On dérive deux fois la fonction f sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 5x^4 - 20x^3$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 20x^3 - 60x^2$$

Étudions le signe de f'' :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 20x^2(x - 3)$$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
signe de $f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Ainsi la fonction f est concave sur $]-\infty ; 3]$ et f est convexe sur $[3 ; +\infty[$.

■ DÉFINITION :

Soient f une fonction dérivable sur I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

S'il existe un point A de $\mathcal{C}_f$ tel que la courbe $\mathcal{C}_f$ **traverse sa tangente** en ce point, on dit que A est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$.

Exemple :

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction cube $f : x \mapsto x^3$ admet l'origine du repère $O(0 ; 0)$ comme point d'inflexion.

La tangente au point O est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

- Pour $x \leq 0$, $f(x) \leq 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la tangente en O .
- Pour $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente en O .

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en O , donc $O(0 ; 0)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Remarque : En un point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.

Exemple :

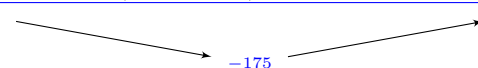
Étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4 - 40x + 120$.

f est une fonction polynôme, elle est dérivable et sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.

f' est aussi une fonction polynôme, elle est dérivable et sa dérivée est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3)$.

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f'' .

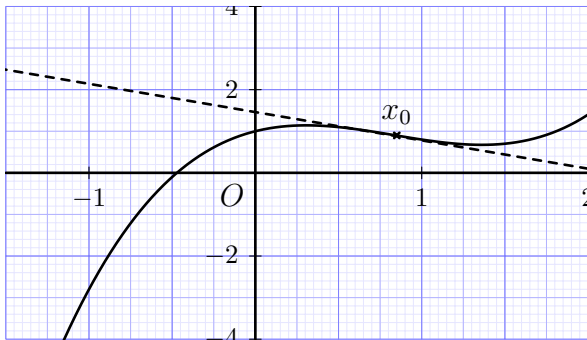
Notons que $20x^2 \geq 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$. D'où le tableau :

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$		
signe de $f''(x)$		-	0	-	0	+
variations de f'						

f est concave sur $]-\infty ; 3]$ et convexe sur $[3 ; +\infty[$.

Exemple :

La courbe ci-dessous est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x(x-1)^2 + 1$.



Déterminer l'abscisse x_0 de son point d'inflexion. Préciser une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0

La fonction f est une combinaison linéaire de fonctions dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x^2 - 2x + 1) + 1 \\ &= x^3 - 2x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 6x - 4$

L'abscisse x_0 du point d'inflexion est la solution de l'équation $f''(x) = 0$, et

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff 6x - 4 = 0 \\ &\iff 6x = 4 \\ &\iff x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ainsi $x_0 = \frac{2}{3}$. Puis, on détermine l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\text{On a } f'(x_0) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \times \left(\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{3}$$

$$\text{et } f(x_0) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + 1 = \frac{29}{27}$$

Donc

$$y = -\frac{1}{3} \left(x - \frac{2}{3}\right) + \frac{29}{27}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9} + \frac{29}{27}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{35}{27}$$

Si les fonctions f et g sont deux fois dérivables et convexes sur un intervalle I alors

- $f + g$ est convexe
- Pour tout réel $\lambda > 0$, λf est convexe sur I .
- Pour tout réel $\lambda < 0$, λf est concave sur I .

Exemple :

Soit $h : x \mapsto x^2 - 3\sqrt{x}$. Est-elle convexe ?

La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, en multipliant par -3 ,

la fonction $x \mapsto -3\sqrt{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

Par somme de fonctions convexes, la fonction h est convexe.

Exemple :

Soient $I = [0 ; +\infty[$ et les fonctions $f : x \mapsto x^4$ et $g : x \mapsto -\sqrt{x}$ définies sur I .

- Étudier la convexité de $h = g \circ f$

La fonction h est définie sur I . Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} h(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^4) \\ &= -\sqrt{x^4} \\ &= -x^2 \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto -x^2$ est négatif sur I .

Donc la fonction h est concave sur I .

- La composée de deux fonctions convexes est-elle une fonction convexe ?

D'après l'exemple précédent, on a montré que la composée des deux fonctions convexes f et g n'est pas une fonction convexe. Ainsi la composée de deux fonctions convexes n'est pas nécessairement une fonction convexe.

- La composée de deux fonctions convexes est-elle une fonction concave ?

En utilisant l'exemple précédent, on considère $u : x \mapsto x^2$ que l'on compose avec elle-même. Alors $u \circ u : x \mapsto (x^2)^2$ c'est-à-dire $u \circ u : x \mapsto x^4$.

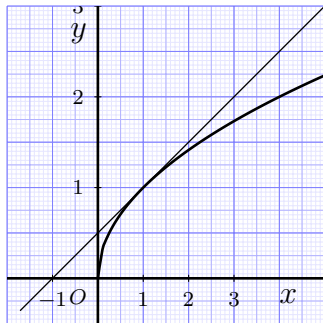
La fonction u est convexe et $u \circ u$ aussi. Donc la composée de deux fonctions convexes n'est pas nécessairement une fonction concave.

La connaissance de la convexité d'une fonction permet d'établir des inégalités.

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.
Donc sa courbe représentative est située en particulier sous sa tangente au point d'abscisse 1.
D'où, pour tout $x > 0$

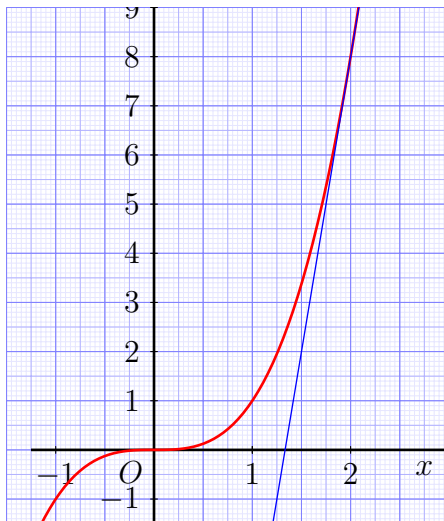
$$\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(x - 1) + 1 \text{ c'est-à-dire } \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$



Exemple :

En utilisant la convexité de la fonction $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}_+$, montrer que ; pour tout $x \geq 0$,

$$x^3 \geq 12x - 16.$$



La représentation graphique nous suggère de rechercher l'équation de la tangente en $x = 2$.
L'équation de cette tangente est

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(2) = 12$
et $f(2) = 8$. Ainsi l'équation de la tangente en 2 est

$$y = 12(x - 2) + 8$$

c'est-à-dire $y = 12x - 16$.

La fonction cube est convexe sur $\mathbb{R}_+$, donc la représentation graphique de la fonction cube est au-dessus de ses tangentes. En particulier

$$x^3 \geq 12x - 16$$

Exemple :

À l'aide d'un argument de convexité, montrer que
pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

- On se place en $a = 0$. L'équation de la tangente à la courbe représentation de la fonction sinus en 0 est

$$y = \sin'(0)(x - 0) + \sin(0)$$

Or, $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$. Donc l'équation de la tangente en 0 est

$$y = x$$

- Puis, on détermine l'équation de la corde joignant le point $A(0 ; 0)$ et le point $B\left(\frac{\pi}{2} ; \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. L'équation réduite de cette droite est de la forme $y = ax$, avec

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Ainsi la corde $[AB]$ est une portion de la droite
d'équation $y = \frac{2}{\pi}x$

La fonction sinus est concave sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, donc la représentation graphique de la fonction sinus est au-dessus de ses cordes. En particulier, $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.

Puis, comme la fonction sinus est concave sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, alors sa représentation graphique est en dessous de ses tangentes. En particulier, $\sin x \leq x$.

D'où, pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$