

Principes de logique

1. Proposition

■ DÉFINITION :

Une **proposition** est un énoncé ayant un sens et susceptible d'être vrai ou faux sans ambiguïté.

Exemple :

- « $3 < 2$ » : Faux
- « $4 \geq 4$ » : Vrai
- « 3 divise 12 » : Vrai
- « 91 est un nombre premier » : Faux ($91 = 7 \times 13$)

■ DÉFINITION :

Une **forme propositionnelle** est un énoncé contenant une (des) variable(s), vrai pour certaines valeurs de la (les) variable(s) et faux pour les autres.

Exemple :

- La phrase « $3x + 6 \geq 0$ » est vraie pour **tous les réels supérieurs ou égaux à -2** , et fausse pour les autres.
- Soit n un entier. On note P_n la forme propositionnelle « n est un multiple de 3 ».

Par exemple, P_{18} est vraie et P_5 est fausse.
On dit que **18 vérifie** P et que **5** ne la vérifie pas.

Dans la suite, on **assimilera** propositions et forme propositionnelle, pour éviter les lourdeurs de langage.

■ DÉFINITION :

Une proposition toujours vraie est appelée une **tautologie**.

■ DÉFINITION :

Une proposition toujours fausse est appelée une **antilogie**.

■ DÉFINITION :

Une proposition à qui, par convention, on attribue la valeur « vrai » s'appelle un **axiome**.

■ DÉFINITION :

La **négation** de P , notée $\neg P$ (lu « non P ») ou encore $\overline{P}$ (lu « P barre »), est vraie lorsque P est fausse, et $\neg P$ est fausse lorsque P est vraie.

2. Proposition définie sur un ensemble E

Exemple :

Soit n un entier positif. On note P_n la proposition « n divise 12 ». On note F l'ensemble des entiers vérifiant P_n . On a donc :

$$F = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n\} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

■ DÉFINITION :

On dit que $\{n \in \mathbb{N} \mid P_n\}$ est un ensemble défini **en compréhension**.

■ DÉFINITION :

On dit que $\{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ est un ensemble défini **en extension**.

On peut définir un sous-ensemble F d'un ensemble E par la donnée d'une proposition P , vraie uniquement pour les éléments de F . On dit que P **caractérise** le sous-ensemble F .

Exemple :

L'équation $3x + 2y = 5$ caractérise les points d'une droite, dont les coordonnées vérifient cette équation et qui sont les seules à la vérifier.

Inversement, à tout sous-ensemble F d'un ensemble E donné en extension, on peut associer la proposition « x appartient à F », et on note « $x \in F$ ». On a donc : $F = \{x \in E \mid P_x\}$.

Si on note A l'ensemble $\{x \in E \mid P_x\}$, alors l'ensemble $\{x \in E \mid \neg P_x\}$ est le complémentaire de A dans E et se note $\overline{A}$.

3. Tables de vérité

■ DÉFINITION : Table de vérité et synonymie

Une **table de vérité** est un tableau permettant de visualiser les valeurs de vérité (Vrai ou Faux) de plusieurs propositions. On dira que deux propositions sont **synonymes** ou **logiquement équivalentes** lorsqu'elles ont même table de vérité. On pourra noter $P \equiv Q$.

Exemple :

P et $\neg(\neg P)$ sont synonymes.

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

4. Connecteurs

■ DÉFINITION :

À partir de propositions, le langage usuel construit d'autres propositions plus complexes ; pour cela, il utilise des connecteurs.

Intitulé	Nom	Symbole	Ensembles
Disjonction inclusive	« ou »	$P \vee Q$	$A \cup B$
Disjonction exclusive	« ou bien » « soit ..., soit... »	$P \oplus Q$	Différence symétrique $A \Delta B = A \cup B - A \cap B$
Conjonction	« et »	$P \wedge Q$	$A \cap B$
Implication	« implique » « si..., alors... »	$P \Rightarrow Q$	$\overline{A} \cup B$, où $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E
Équivalence	« si et seulement si »	$P \Leftrightarrow Q$	Complémentaire de $A \Delta B$

Tables de vérité :

P	Q	$P \vee Q$	$P \oplus Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V	V

Remarque : Le connecteur « ou » n'a pas le même sens dans les deux phrases suivantes :

- « Qu'il pleuve ou qu'il vente, ne sortez pas ! »
- « Je partirai lundi ou mardi. »

Le premier « ou » est inclusif (car il peut pleuvoir et vent en même temps) et le deuxième exclusif, car lundi **et** mardi sont **incompatibles** (P et Q sont dits incompatibles lorsque $P \wedge Q$ est une antilogie). Le langage courant est parfois imprécis quant à la différence d'utilisation de ces deux « ou ».

Remarque : Le connecteur « et » a parfois, dans le langage courant, un autre sens qu'en mathématiques :

- « et » a le sens de « puis » dans « je jouerai au volley et je me baignerai »
- « et » a le sens de « donc » dans « il a mangé trop de chocolat et il a eu une crise de foie ».
- « et » a bien le sens de « et » dans « pour entrer ici, il faut être majeur et membre du club »
- « et » a le sens de « ou » dans « peuvent entrer ici les personnes majeures et les membres du club »

Remarque : L'implication, symbolisée par l'expression « si..., alors... », est source de nombreuses erreurs : si l'on comprend facilement que $P \vee Q$ et $P \wedge Q$ sont des propositions créées à partir d'autres, l'implication est souvent comprise et utilisée (à tort) comme un rapport « de cause à effet ».

Cela peut provenir de l'utilisation du verbe « implique » qui, contrairement aux connecteurs « et » et « ou », semble indiquer une conséquence.

L'expression « P implique Q » fait référence à trois valeurs de vérité : celles de P , celle de Q et celle de $P \Rightarrow Q$. Lorsque l'on fait une erreur, c'est le plus souvent qu'on sous-entend que P est vraie alors que justement, si P est fausse, l'implication est vraie.

On montrera plus loin que « $P \Rightarrow Q$ » est synonyme de $(\neg P) \vee Q$, ce qui montre bien qu'il s'agit d'un connecteur comme les autres. On peut s'en rendre compte dans les phrases suivantes : « Si tu bouges, alors je tire ! », qui est bien synonyme de « Ne bouge pas, ou je tire ! ».

■ **PROPRIÉTÉ** : Principe du tiers-exclu
 Soit P une proposition quelconque.

$$P \vee (\neg P) \text{ est une tautologie}$$

■ **PROPRIÉTÉ** : Principe de non-contradiction
 Soit P une proposition quelconque.

$$P \wedge (\neg P) \text{ est une antilogie}$$

Démonstration.

□

■ **PROPRIÉTÉ** : Distributivité 1
 Soient P, Q et R trois propositions quelconques.

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

■ **PROPRIÉTÉ** : Distributivité 2
 Soient P, Q et R trois propositions quelconques.

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

■ **PROPRIÉTÉ** : Lois de Morgan¹
 Soient P et Q deux propositions quelconques.

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$$

Démonstration de la première loi.

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

□

Démonstration de la propriété distributivité 1.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

□

Remarque : Les lois de Morgan peuvent s'appliquer dans le langage courant :

- La négation de « j'achèterai des pommes et des poires » est « je n'achèterai pas de pommes ou je n'achèterai pas de poires ».
- La négation de « j'irai à Paris ou à Berlin » est « je n'irai pas à Paris et pas à Berlin » (cependant on dirait plus correctement « je n'irai ni à Paris ni à Berlin »).

■ **PROPRIÉTÉ** :
 Soient P et Q deux propositions quelconques.

$$(P \Rightarrow Q) \equiv ((\neg P) \vee Q)$$

■ **PROPRIÉTÉ** :
 Soient P et Q deux propositions quelconques.

$$(P \Longleftrightarrow Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$$

■ **PROPRIÉTÉ** :
 Soient P et Q deux propositions quelconques.

$$(P \Longrightarrow Q) \equiv ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$$

■ **DÉFINITION** : contraposée d'une implication
 Soient P et Q deux propositions quelconques.

$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ s'appelle la **contraposée** de $P \Rightarrow Q$ et lui est synonyme.

La synonymie de deux propositions est très utile dans les démonstrations, en remplaçant une proposition par une proposition équivalente plus facile à démontrer.


Attention
 $Q \Rightarrow P$ est la **réciproque** de $P \Rightarrow Q$ et ne lui est pas synonyme.

1. Auguste (ou Augustus) De Morgan (27 juin 1806 - 18 mars 1871) est un mathématicien et logicien britannique, né en Inde.

5. Quantificateurs

A. Le quantificateur universel $\forall$

Lorsqu'on veut indiquer qu'un grand nombre d'éléments vérifient une proposition, au lieu d'écrire : « $P(a)$ et $P(b)$ et $P(c)$ et... », on peut utiliser le **quantificateur universel** « quel que soit » ou « pour tout ».

En notant E l'ensemble des valeurs vérifiant la proposition

$$\forall x \in E, P(x)$$

Le symbole est la lettre A à l'envers, première lettre de « all » (« tout » en anglais).

Attention

La négation de « $\forall x \in E, P(x)$ » n'est pas « $\forall x \in E, \neg P(x)$ », car si une propriété n'est pas vérifiée par toutes les valeurs d'un ensemble, c'est qu'il existe au moins une de ces valeurs qui ne la vérifie pas.

B. Le quantificateur existentiel $\exists$

On peut définir le **quantificateur existentiel** « il existe au moins », symbolisé par $\exists$, qui est un E à l'envers, première lettre de « existe ». Ainsi, on a :

$$(\neg(\forall x \in E, P(x))) \equiv (\exists x \in E, \neg P(x))$$

Remarque : Lorsqu'une proposition n'est vérifiée que par un seul élément, on peut utiliser l'expression « il existe un unique », symbolisé par $\exists!$

■ PROPRIÉTÉ :

Soit E un ensemble non vide et P une proposition.

$$\exists x \in E, \neg P(x) \equiv \{x \in E \mid P(x)\} \neq E$$

■ PROPRIÉTÉ :

Soit E un ensemble non vide et P une proposition.

$$\exists x \in E, P(x) \equiv \{x \in E \mid P(x)\} \neq \emptyset$$

■ PROPRIÉTÉ :

Soit E un ensemble non vide et P une proposition.

$$\neg(\exists x \in E, P(x)) \equiv \begin{cases} \forall x \in E, \neg P(x) \\ \text{ou encore} \\ \{x \in E \mid P(x)\} = \emptyset \end{cases}$$

C. Utilisation commune des deux quantificateurs

Attention

Dans une proposition utilisant à la fois $\forall$ et $\exists$, l'ordre des quantificateurs est **très important** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$$

est vrai. En effet, $y = -x$ convient.

Mais

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = 0$$

est faux !

Le « $\forall x$ » avant le « $\exists y$ » indique que y dépend de x , alors que « $\exists x$ » avant le « $\forall y$ » indique que le x sera le même pour tous les y , et donc ne dépend pas d'eux.

En revanche, deux $\forall$, ou deux $\exists$ qui se suivent directement peuvent être mis dans un ordre quelconque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0$$

et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0$$

sont synonymes et on peut même écrire :

$$\forall (x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0$$

ou encore

$$\forall (x ; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 0$$

Principes de rédaction

« Je cherche à produire des solutions correctes et bien rédigées... mais je ne sais jamais par où commencer ! »
M. Dhénin, à son professeur de mathématiques, en terminale S.

Exemple :

Déterminer l'ensemble des réels $x \in [0 ; 1] \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

$$f(x) = \frac{x}{2x-1} \implies f'(x) = \frac{1 \times (2x-1) - x \times 2}{(2x-1)^2} = \frac{-1}{(2x-1)^2} < 0$$

Donc on a le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	0		1

Donc $\mathcal{S} = \{0 ; 1\}$.

Principes logiques

■ PRINCIPE 1 : Introduire

Introduire au préalable convenablement toute variable utilisée.

Exemple :

« Soit $x \in [0 ; 1]$ »

« On considère la fonction f définie par : ... »

■ PRINCIPE 2 : Relier

Relier les éléments grâce à des articulations logiques appropriées.



Attention

Le symbole $\implies$ n'est pas une abréviation de « Donc ». Il ne faut **jamais** utiliser les symboles mathématiques comme des abréviations.

■ PRINCIPE 3 : Existence

Établir l'existence des objets avant de les manipuler.

Exemple :

- Le dénominateur est-il non nul ?
- La fonction est-elle dérivable ?
- Le radicande est-il positif ?

■ PRINCIPE 4 : Vérification

Vérifier les hypothèses des résultats utilisés.

Exemple :

Au moment où l'on écrit « Donc » ou « d'après le théorème de ... », vérifier que tout est justifié.

Principes formels

■ PRINCIPE 5 : Français / Maths

Éviter de mélanger le français et les mathématiques.

Exemple :

Présenter les calculs en colonne (un = par ligne!).

■ PRINCIPE 6 : Expliquer

Expliquer les raisonnements par des phrases.

Exemple :

Ne pas utiliser « Donc » de manière péremptoire : prendre le temps d'utiliser les mots adéquats pour justifier les résultats.

■ PRINCIPE 7 : Mise en valeur

Mettre fièrement en valeur chaque résultat

Exemple :

Souligner ou encadrer les résultats. Le but est de faciliter la lecture du correcteur.

Exemple :

On considère la fonction f définie, pour tout $x \in [0 ; 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ par

$$f(x) = \frac{x}{2x - 1}$$

La fonction f est définie et dérivable sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2} ; 1\right]$ en tant que quotient de deux fonctions définies et dérivables sur chacun de ces intervalles, où $x \mapsto 2x - 1$ ne s'annule pas sur $[0 ; 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

On calcule, pour tout $x \in [0 ; 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (2x - 1) - x \times 2}{(2x - 1)^2} \\ &= \frac{-1}{(2x - 1)^2} < 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $\left[0 ; \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2} ; 1\right]$

Or, $f(0) = 0$, donc d'après la strictement décroissance de f , $f(x) < 0$ pour tout $x \in \left]0 ; \frac{1}{2}\right[$.

De même, $f(1) = 1$, donc $f(x) > 1$ pour tout $x \in \left]\frac{1}{2} ; 1\right[$.

Ce qui précède permet d'affirmer :

$$\left\{x \in [0 ; 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \mid 0 \leq \frac{x}{2x - 1} \leq 1\right\} = \{0 ; 1\}$$

Remarque :

- « A-t-on vraiment le temps de produire une solution aussi longue dans le cadre d'une évaluation ? » Dans un premier temps, le but est d'être capable de produire une solution complète. Dans le cadre de progrès en mathématiques, il est invraisemblable de chercher autre chose, et dans le cadre d'une évaluation, c'est la seule façon d'obtenir tous les points. Gagner du temps doit se faire en conservant les articulations logiques constitutives du raisonnement.
- « N'est-il donc jamais envisageable de sous-entendre certains arguments sans les écrire explicitement ? » En fonction du niveau d'études, certains arguments pourront être sous-entendus.

Exemple :

Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $(x + 1)(x - 1) \leq 0$

Cet exemple sous-entend tout un raisonnement (que vous devez être capables de faire !). Un tel raisonnement serait exigible au collège, mais serait ridicule dans les études supérieures.

- « Comment peut-on déterminer **à coup sûr** les arguments qui peuvent être sous-entendus ? » Cela relève de l'usage. Comme dans une conversation, on tient parfois des propos elliptiques, mais on ne peut jamais savoir **à coup sûr** si l'on va être compris. La capacité d'identification va se développer avec le temps, en écoutant les conseils. En attendant, dans le doute, mieux vaut faire apparaître les arguments... cela prend généralement peu de temps !
- « Hélas, il me semble que je suis bien loin du compte pour produire de telles rédactions ! » C'est normal ! Tout le monde est passé par là, et il n'y a rien qui ne puisse s'améliorer avec de l'entraînement.

Principes de raisonnement

1. Vérification directe par le calcul

Il y a (au moins) trois méthodes pour montrer que

$$A = B$$

1. On part de A et, grâce à une série d'égalités, on arrive à B :

$$\begin{aligned} A &= \dots \\ &= \dots \\ &= B \end{aligned}$$

2. On montre que $A = C$ et que $B = C$.
3. On montre que $A - B = 0$



Attention

On peut aussi montrer que $\frac{A}{B} = 1$, mais cela nécessite d'avoir vérifié **au préalable** que $B \neq 0$ (et de l'avoir mentionné dans son raisonnement!).

Exemple :

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 - 4 &= x^2 - 2x + 1 - 4 \\ &= x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(x + 7\pi) = 1 - \sin^2(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part,

$$\begin{aligned} \cos^2(x + 7\pi) &= \cos^2(x - \pi) \\ &= (\cos(\pi - x))^2 \\ &= (-\cos(x))^2 \\ &= \cos^2(x) \end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} 1 - \sin^2(x) &= \cos^2(x) + \sin(x) - \sin^2(x) \\ &= \cos^2(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\cos^2(x + 2\pi) = 1 - \sin^2(x)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère $A = \frac{10^n}{10^n - 1}$ et $B = \frac{10^n + 1}{10^n}$.
Existe-t-il une valeur de n telle que $A = B$?

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{10^n}{10^n - 1} - \frac{10^n + 1}{10^n} \\ &= \frac{10^n \times 10^n - (10^n + 1)(10^n + 1)}{10^n(10^n - 1)} \\ &= \frac{10^{2n} - (10^{2n} + 1)}{10^n(10^n - 1)} \\ &= \frac{1}{10^n(10^n - 1)} \end{aligned}$$

2. Le modus ponens, ou détachement, est une figure du raisonnement logique concernant l'implication. Elle consiste à affirmer une implication (« si A alors B ») et à poser ensuite l'antécédent (« or A ») pour en déduire le conséquent (« donc B »).

2. Démonstrations par détachement (*modus ponens*²)

■ PROPRIÉTÉ : Règle de base

Soient P et Q deux propositions. Alors

$$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q \text{ est une tautologie.}$$

On part d'une hypothèse vraie (P), on suit des règles logiques ($P \Rightarrow Q$), et on arrive à une conclusion vraie (Q) : c'est la méthode la plus classique.

Exemple :

Montrons que 31 782 est un multiple de 3.

On sait que la somme des chiffres de 31 782 est divisible par 3.

Or, si x est un nombre dont la somme des chiffres est divisible par 3, alors x est divisible par 3.

Donc 31 782 est divisible par 3.



Attention

Si 32 085 est divisible par 13, alors $32\,085^2$ est divisible par $13^2 = 169$.

Cette implication est vraie, mais $32\,085^2$ n'est pas divisible par 169.

3. Démonstration par disjonction de cas

■ PROPRIÉTÉ :

Soient P et Q deux propositions.

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q \text{ est une tautologie.}$$

Exemple :

Montrer que, pour tout réel x , $x^2 \geq 0$.

4. Démonstration par contraposée

■ PROPRIÉTÉ :

Soient P et Q deux propositions.

$$(P \Rightarrow Q) \equiv ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$$

Exemple :

Montrer que, pour tout entier n , si n^2 est pair, alors n est pair.

5. Démonstration par l'absurde

■ PROPRIÉTÉ :

Pour montrer une proposition, on montre que sa négation aboutit à une contradiction.

Principes : Soit P une proposition.

- Pour montrer que P est vraie, on suppose tout d'abord que $\neg P$ est vraie.
- On démontre ensuite qu'il existe une proposition Q telle que $((\neg P) \Rightarrow Q)$ est vraie ; on a ainsi démontré que Q est vraie.
- Or on sait par ailleurs que Q est fausse, **d'où contradiction**. Comme $((\neg P) \Rightarrow Q)$ est vraie alors $\neg P$ est fausse donc P est vraie.

Exemple :

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

6. Démonstration par contre-exemple

■ PROPRIÉTÉ :

Soit P_x une proposition dépendant de la variable x .

$$(\neg(\forall x, P_x)) \equiv (\exists x, \neg(P_x))$$

Pour montrer qu'une proposition n'est pas toujours vraie, il suffit de trouver au moins une valeur pour laquelle elle est fausse.

Exemple :

$P(n) = n^2 - n + 41$ est-il un nombre premier pour tout entier n ?³

Pour $n = 41$, on a $n^2 - n + 41$ n'est pas un nombre premier. En effet

$$41^2 - 41 + 41 = 41^2$$

qui est divisible par 41.

Remarque : On a : $(P \Rightarrow Q) \equiv (\bar{P} \vee Q)$. Donc, grâce à l'une des deux lois de Morgan :

$$(\neg(P \Rightarrow Q)) \equiv (P \wedge \bar{Q})$$

3. Leonhard Euler (1707-1783) a démontré qu'il existait une infinité de nombres premiers et a cherché des expressions donnant des nombres premiers. Sans parvenir à une formule générale, il a découvert avec d'autres mathématiciens des « familles » de nombres premiers.

