

Contrôle n° 8 : Bac blanc

• • Mardi 28 mai 2024 • •

La calculatrice est autorisée.

Nom :

Prénom :

Classe : 1^{re} ES

Consigne : mettre son nom sur ce sujet et le rendre avec la copie.
Une feuille de brouillon est autorisée.

Exercice n° 1 : Probabilités conditionnelles et variable aléatoire

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un weekend en province. Une enquête est faite auprès des 1 200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transports et a donné les résultats ci-contre :

	Train	Avion	Autocar	Total
Femme	468	196	56	720
Homme	150	266	64	480
Total	618	462	120	1 200

Partie A

On interroge au hasard un employé de cette entreprise. On note :

- F l'événement « L'employé est une femme » ;
 - T l'événement « L'employé choisit le train ».
1. Calculer les probabilités $P(F)$ et $P(T)$.
 2. Déterminer la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train (on donnera les résultats sous forme décimale).
 3. Calculer la probabilité que l'employé interrogé soit une femme et qu'elle choisisse le train.
 4. Les événements F et T sont-ils indépendants ?
 5. L'employé interrogé au hasard ne choisit pas le train. Calculer la probabilité que cet employé soit une femme. Arrondir au millième.

Partie B

Après l'étude des résultats de l'enquête, le comité d'entreprise choisit le train comme moyen de transport. Pour les employés inscrits à ce voyage, deux formules sont proposées :

- Formule 1 : voyage en première classe et hôtel pour 150 euros.
- Formule 2 : voyage en deuxième classe et hôtel pour 100 euros.

40 % des employés choisissent la formule 1.

Le comité d'entreprise propose une excursion facultative pour un coût de 30 euros.

Indépendamment de la formule choisie, 80 % des employés inscrits choisissent l'excursion facultative.

On interroge au hasard un employé inscrit à ce voyage. On note C le coût total du voyage en euros (excursion éventuelle comprise).

On appelle U l'événement « L'employé choisit la formule 1 », D l'événement « L'employé choisit la formule 2 » et E l'événement « L'employé choisit l'excursion facultative ».

1. Déterminer la loi de probabilité de C .
2. Calculer l'espérance de cette loi. Interpréter le résultat.

Aufgabe n° 2 : bedingte Warscheinlichkeiten

Eine Ferienresidenz bietet nur zwei Pauschalen an :

- die « Vollpension », bei der drei Mahlzeiten pro Tag bereitgestellt werden ;
- die « Halbpension », bei der nur Frühstück und Abendessen bereitgestellt werden.

Im Jahr 2018 haben 65 % der Gäste die Vollpension gewählt ; die anderen haben die « Halbpension » gewählt.

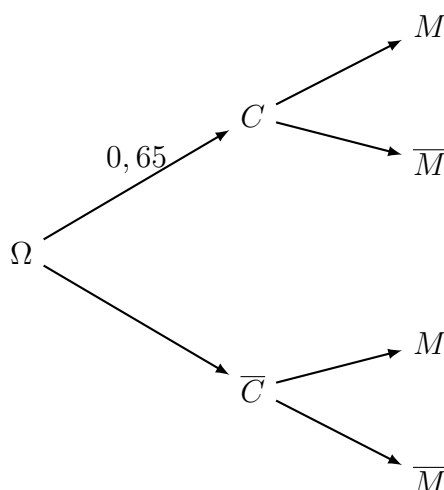
Unter den Gästen, die die Halbpension gewählt haben, haben 30 % die Option « Reinigung » am Ende der Woche gebucht.

Außerdem haben 70 % der Gäste, die die Vollpension gewählt haben, die Option « Reinigung » gebucht.

Man wählt zufällig einen Gast aus dem Jahr 2018 aus und betrachtet die folgenden Ereignisse :

- C : der Gast hat die « Vollpension » gewählt ;
- M : der Gast hat die Option « Reinigung » gewählt.

1. Ergänzen Sie den folgenden gewichteten Baum :



2. Berechnen Sie $P(C \cap M)$.
3. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Gast die Option « Reinigung » gebucht hat, gleich 0,56 ist.
4. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Gast die « Vollpension » gewählt hat, unter der Bedingung, dass er die Option « Reinigung » gebucht hat.
5. Hier ist die Preisliste der Ferienresidenz für das Jahr 2018 :

Eine Woche Vollpension	800 €
Eine Woche Halbpension	650 €
Option « Reinigung »	50 €

Wir bezeichnen mit X die Zufallsvariable, die dem von einem Gast im Jahr 2018 gezahlten Betrag entspricht.

Berechnen Sie $P(X = 850)$.

Aufgabe n° 3 : Folgen

Die Buchsbaumzünsler (*Cydalima perspectalis*) ist eine Schmetterlingsart aus der Familie der Crambidae, die ursprünglich aus Fernost stammt. Sie wurde in den 2000er Jahren versehentlich nach Europa eingeschleppt und wurde dort schnell invasiv. Eine Studie, die die Anzahl der Buchsbaumzünsler-Raupen in einem Campingplatz in der Ardèche zählt, gibt folgende Schätzungen :

Datum	01/06/18	02/06/18	03/06/18
n	0	1	2
Anzahl der Raupen in Hunderten	97	158	258

Die Aufgabe untersucht und vergleicht zwei Modelle zur Entwicklung der Raupenanzahl.

Teil 1 : Modell 1

In diesem Teil wird die Anzahl der Raupen am n -ten Tag nach dem 1. Juni 2018 (Anzahl in Hunderten ausgedrückt) durch eine geometrische Folge (u_n) mit dem Verhältnis $q = 1,63$ modelliert. Es gilt $u_0 = 97$.

1. Berechnen Sie u_2 . Runden Sie auf die nächste ganze Zahl.
2. Drücken Sie (u_n) in Abhängigkeit von n aus, für jede natürliche Zahl n .
3. Begründen Sie, dass die Folge (u_n) wachsend ist.
4. Wie viele Raupen wird es gemäß diesem Modell am 13. Juni 2018 geben? Runden Sie auf die nächste Hunderterstelle.

Teil 2 : Modell 2

In diesem Teil wird die Anzahl der Raupen am n -ten Tag nach dem 1. Juni 2018 (Anzahl in Hunderten ausgedrückt) durch eine Folge (v_n) modelliert, die wie folgt definiert ist : $v_0 = 97$ und für jede natürliche Zahl n gilt $v_{n+1} = 0,91v_n + 93$.

1. Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n gilt : $v_n = \frac{1}{3}(-2809 \times 0,91^n + 3100)$
2. Wie viele Raupen wird es gemäß diesem Modell am 13. Juni 2018 geben? Runden Sie auf die nächste Hunderterstelle.
3. Zeigen Sie, dass die Folge (v_n) wachsend ist.

Teil 3 : Vergleich der verschiedenen Modelle

Der am 13. Juni 2018 im Campingplatz erfasste Wert beträgt 745 Raupen. Welches Modell erscheint anhand dieses Wertes am besten geeignet?

Exercice n° 4 : Probabilités et suites

Julia et Lucie aiment jouer au tennis l'une contre l'autre. Lorsqu'elles débudent une partie, Julia a autant de chances de perdre que de gagner le premier jeu.

On admet que lorsque Julia gagne un jeu, la probabilité qu'elle gagne le jeu suivant est 0,6. Si elle perd un jeu, la probabilité qu'elle perde le suivant est 0,7.

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on note :

- G_n l'événement « Julia gagne le n -ième jeu » ;
- $\overline{G_n}$ l'événement « Julia perd le n -ième jeu ».

1. (a) Déterminer $P(G_1)$ et $P(\overline{G_1})$
(b) Calculer $P(G_2)$ et $P(\overline{G_2})$
2. On définit les deux suites (u_n) et (v_n) suivantes :

pour tout entier naturel n , par $u_n = P(G_n)$ et $v_n = P(\overline{G_n})$

- (a) En s'aidant d'un arbre pondéré, démontrer que, pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = 0,6u_n + 0,3v_n \text{ et } v_{n+1} = 0,4u_n + 0,7v_n$$

- (b) Démontrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante.
(c) Démontrer que la suite $(4u_n - 3v_n)$ est géométrique.
3. (a) Quelle est la probabilité que Julia gagne le troisième jeu ?
(b) Julia a-t-elle plus de chance de gagner que son adversaire ?
(c) On admet que, pour tout n entier naturel non nul,

$$7u_n = 3 + 0,5 \times 0,3^{n-1}$$

Si Julia et Lucie jouent un très grand nombre de jeux, vers quelle valeur la probabilité que Julia gagne le dernier jeu se rapproche-t-elle ?

Aufgabe n° 1 : Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Zufallsvariablen

Der Betriebsrat eines Pariser Unternehmens möchte ein Wochenende auf dem Land organisieren. Eine Umfrage unter den 1 200 Mitarbeitern dieses Unternehmens ergab folgende Ergebnisse in Bezug auf die Wahl der Transportmittel :

	Zug	Flugzeug	Reisebus	Gesamt
Frau	468	196	56	720
Mann	150	266	64	480
Gesamt	618	462	120	1 200

Teil A

Ein Mitarbeiter dieses Unternehmens wird zufällig befragt. Wir bezeichnen mit F das Ereignis „Der Mitarbeiter ist eine Frau“ und mit T das Ereignis „Der Mitarbeiter wählt den Zug“.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(F)$ und $P(T)$ und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Mitarbeiter nicht den Zug wählt (geben Sie die Ergebnisse in Dezimalform an).
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der befragte Mitarbeiter eine Frau ist und den Zug wählt.
3. Sind die Ereignisse F und T unabhängig ?
4. Der zufällig befragte Mitarbeiter wählt nicht den Zug. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Mitarbeiter eine Frau ist. Runden Sie auf das Tausendstel.

Teil B

Nach der Auswertung der Umfrageergebnisse wählt der Betriebsrat den Zug als Transportmittel. Für die angemeldeten Mitarbeiter werden zwei Optionen angeboten :

- Option 1 : Reise in der ersten Klasse und Hotel für 150 Euro.
- Option 2 : Reise in der zweiten Klasse und Hotel für 100 Euro.

40 % der Mitarbeiter wählen die Option 1.

Der Betriebsrat bietet einen optionalen Ausflug für 30 Euro an. Unabhängig von der gewählten Option entscheiden sich 80 % der angemeldeten Mitarbeiter für den optionalen Ausflug.

Ein zufällig ausgewählter Mitarbeiter, der sich für diese Reise angemeldet hat, wird befragt. Wir bezeichnen mit C die Gesamtkosten der Reise in Euro (inklusive Ausflug).

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von C .
2. Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Verteilung. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Exercice n° 2 : Suites

La Pyrale du buis est une espèce de lépidoptères de la famille des Crambidae, originaire d'Extrême-Orient. Introduite accidentellement en Europe dans les années 2000, elle y est rapidement devenue invasive. Une étude décomptant le nombre de chenilles de Pyrale dans un camping d'Ardèche donne les estimations suivantes :

Date	01/06/18	02/06/18	03/06/18
n	0	1	2
Nombre de chenilles en centaines	97	158	258

L'exercice étudie et compare deux modélisations de l'évolution du nombre de chenilles.

Partie 1 : Modèle 1

Dans cette partie, on modélise le nombre de chenilles le n -ième jour après le 1^{er} juin 2018 (nombre exprimé en centaines) par une suite géométrique (u_n) de raison $q = 1,63$. Ainsi $u_0 = 97$.

1. Calculer u_2 en arrondissant à l'unité.
2. Exprimer (u_n) en fonction de l'entier n
3. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
4. Selon ce modèle, quel était le nombre de chenilles le 13 juin 2018 ? Arrondir à la centaine.

Partie 2 : Modèle 2

Dans cette partie, on modélise le nombre de chenilles le n -ième jour après le 1^{er} juin 2018 (nombre exprimé en centaines) par une suite (v_n) telle que : $v_0 = 97$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,91v_n + 93$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{1}{3}(-2809 \times 0,91^n + 3100)$
2. Selon ce modèle, quel était le nombre de chenilles le 13 juin 2018 ? Arrondir à la centaine.
3. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

Partie 3 : Comparaison des différents modèles

La valeur relevée dans le camping le 13 juin 2018 est de 745 centaines de chenilles.
À partir de ce relevé, quel modèle paraît le plus adapté ?

Exercice n° 3 : Probabilités conditionnelles

Une résidence de vacances propose uniquement deux formules :

- la formule « pension complète » dans laquelle trois repas par jour sont fournis ;
- la formule « demi-pension » dans laquelle sont fournis uniquement le petit déjeuner et le dîner.

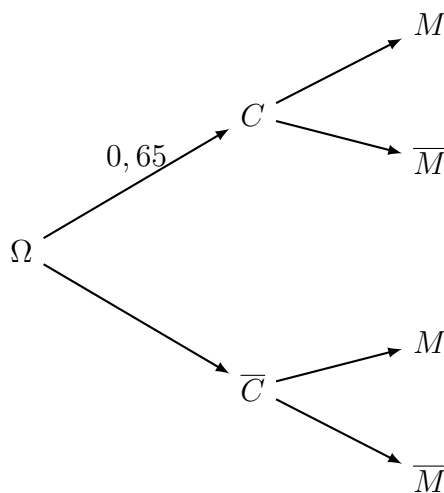
Pour l'année 2018, 65 % des clients ont choisi la pension complète ; les autres ont choisi la formule « demi-pension ».

Parmi les clients qui ont choisi la demi-pension, 30 % ont réservé l'option « ménage » en fin de semaine. De plus, 70 % des clients qui ont choisi la pension complète ont réservé l'option « ménage ».

On choisit un client au hasard parmi ceux de l'année 2018 et l'on considère les événements suivants :

- C : le client a choisi la formule « pension complète » ;
- M : le client a choisi l'option « ménage ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2. Calculer $P(C \cap M)$.
3. Montrer que la probabilité que le client ait réservé l'option « ménage » est égale à 0,56.
4. Calculer la probabilité que le client ait choisi la formule « pension complète » sachant qu'il a réservé l'option « ménage ».
5. Voici la grille de tarifs de la résidence de vacances pour l'année 2018 :

Une semaine de pension complète	800 €
Une semaine de demi-pension	650 €
Option « ménage »	50 €

On note X la variable aléatoire égale au montant payé par un client de 2018.

Calculer $P(X = 850)$.

Aufgabe n° 4 : Wahrscheinlichkeiten und Folgen

Julia und Lucie spielen gerne gegeneinander Tennis. Wenn sie ein Spiel beginnen, hat Julia die gleichen Chancen, das erste Spiel zu gewinnen oder zu verlieren.

Es wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Julia ein Spiel gewinnt, wenn sie das vorherige Spiel gewonnen hat, $0,6$ beträgt; während die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein Spiel verliert, wenn sie das vorherige Spiel verloren hat, $0,7$ beträgt.

Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ bezeichnen wir :

- G_n das Ereignis „Julia gewinnt das n -te Spiel“;
- $\overline{G_n}$ das Ereignis „Julia verliert das n -te Spiel“.

- Bestimmen Sie $P(G_1)$ und $P(\overline{G_1})$.
 - Berechnen Sie $P(G_2)$ und $P(\overline{G_2})$.
- Wir definieren zwei Folgen (u_n) und (v_n) für jede natürliche Zahl n durch $u_n = P(G_n)$ und $v_n = P(\overline{G_n})$.
 - Zeigen Sie mithilfe eines gewichteten Baums, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt :
 $u_{n+1} = 0,6u_n + 0,3v_n$ und $v_{n+1} = 0,4u_n + 0,7v_n$.
 - Zeigen Sie, dass die Folge $(u_n + v_n)$ konstant ist.
 - Zeigen Sie, dass die Folge $(4u_n - 3v_n)$ eine geometrische Folge ist.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Julia das fünfte Spiel gewinnt ? das achte Spiel ?
 - Kann die Wahrscheinlichkeit, dass Julia ein Spiel gewinnt, kleiner als $\frac{3}{7}$ sein ? Begründen Sie.
 - Wenn Julia und Lucie eine sehr große Anzahl von Spielen spielen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Julia das letzte Spiel gewinnt (auf das Tausendstel gerundet) ?

Lösung der Aufgabe n° 1 : Probabilités conditionnelles et variable aléatoire

Partie A

Dans toute cette partie, il y a équiprobabilité.

1. D'après la formule de Laplace, $P(F) = \frac{720}{1200} = 0,6$ et $P(T) = \frac{618}{1200} = 0,515$.

Ainsi $P(F) = 0,6$ et $P(T) = 0,515$.

2. $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,515 = 0,485$.

Donc $P(\overline{T}) = 0,485$.

3. $P(F \cap T) = \frac{468}{1200} = 0,39$

La probabilité qu'un employé soit une femme qui choisit le train est $P(F \cap T) = 0,39$.

4. $P(F) \times P(T) = 0,6 \times 0,515 = 0,309$ et $P(F \cap T) \neq 0,309$. Donc les événements ne sont pas indépendants.

5. La probabilité cherchée est

$$P_{\overline{T}}(F) = \frac{P(F \cap \overline{T})}{P(\overline{T})}$$

T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales : $P(F) = P(F \cap T) + P(F \cap \overline{T})$. Ainsi $P(F \cap \overline{T}) = P(F) - P(F \cap T) = 0,6 - 0,39 = 0,21$.

Par conséquent, $P_{\overline{T}}(F) = \frac{0,21}{0,485} \approx 0,433$

La probabilité qu'un employé soit une femme sachant que cet employé n'a pas choisit le train est $P_{\overline{T}}(F) \approx 0,433$.

Partie B

Soit C le coût total du voyage (excursion éventuelle comprise).

- Si l'employé inscrit choisit la formule 1 et l'excursion facultative, il paie $150 + 30 = 180$ euros.
 - Si l'employé inscrit choisit la formule 1 mais pas l'excursion facultative, il paie 150 euros.
 - Si l'employé inscrit choisit la formule 2 et l'excursion facultative, il paie $100 + 30 = 130$ euros.
 - Si l'employé inscrit choisit la formule 2 mais pas l'excursion facultative, il paie 100 euros.
1. $P(U \cap E) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$; $P(U \cap \overline{E}) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$ et $P(D \cap \overline{E}) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$.
D'où la loi de probabilité de C :

Coût total en euros c_i	100	130	150	180
Probabilité $P(C = c_i)$	0,12	0,48	0,08	0,32

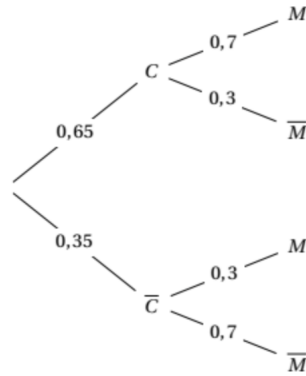
2. L'espérance mathématique de cette loi est :

$$E(C) = 100 \times 0,12 + 130 \times 0,48 + 150 \times 0,08 + 180 \times 0,32 = 144$$

Le coût moyen du voyage (excursion éventuelle comprise) est de 144 euros par participant.

Lösung der Aufgabe n° 2 : bedingte Warscheinlichkeiten

1. Voici l'arbre représentant la situation :



2. On a donc

$$\begin{aligned} P(C \cap M) &= P(C) \times P_C(M) \\ &= 0,65 \times 0,7 \\ &= 0,455 \end{aligned}$$

3. C et $\overline{C}$ forment un système complet d'événements (une partition). D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(M) &= P(C \cap M) + P(\overline{C} \cap M) \\ &= 0,455 + 0,35 \times 0,3 \\ &= 0,56 \end{aligned}$$

La probabilité que le client ait réservé l'option ménage est égale à 0,56.

4. On veut calculer $P_M(C)$.

$$\begin{aligned} P_M(C) &= \frac{P(C \cap M)}{P(M)} \\ &= \frac{0,455}{0,56} \\ &= 0,8125 \end{aligned}$$

La probabilité que le client ait choisi la formule « pension complète » sachant qu'il a réservé l'option ménage est égale à 0,8125.

5. On a $P(X = 850) = P(C \cap M) = 0,455$.

Lösung der Aufgabe n° 3 : Folgen

Partie 1

1. On a $u_1 = q \times u_0 = 158,11 \approx 159$ et $u_2 = q \times u_1 = 257,7193 \approx 258$
2. (u_n) est la suite géométrique de raison $1,63$ et de premier terme $u_0 = 97$. Par conséquent, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 97 \times 1,63^n$
3. On sait que $u_0 = 97 > 0$ et $1,63 > 1$. La suite géométrique (u_n) de raison $1,63$ et de premier terme $u_0 = 97$ est donc croissante.
4. Le 13 juin 2018 correspond à $n = 12$. Or $u_{12} = 97 \times 1,63^{12} \approx 34\,121$. Il y a aura donc 3 412 100 chenilles le 13 juin 2018.

Partie 2

1. On considère la suite auxiliaire (w_n) définie par, pour tout n entier naturel, $w_n = v_n - \frac{93}{1 - 0,91} =$

$$\begin{aligned} v_n - \frac{3100}{3}. \text{ Alors, pour tout entier naturel } n, \\ w_{n+1} &= v_{n+1} - \frac{3100}{3} \\ &= 0,91v_n + 93 - \frac{3100}{3} \\ &= 0,91v_n - \frac{2821}{3} \\ &= 0,91 \left(v_n - \frac{3100}{3} \right) \\ &= 0,91w_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite (w_n) est la suite géométrique de premier terme $w_0 = v_0 - \frac{3100}{3} = 97 - \frac{3100}{3} = -\frac{2809}{3}$ et de raison $0,91$. Ainsi, pour tout entier naturel n , $w_n = -\frac{2809}{3} \times 0,91^n$.

D'où, pour tout entier naturel n , $v_n = w_n + \frac{3100}{3} = -\frac{2809}{3} \times 0,91^n + \frac{3100}{3} = \frac{1}{3} (-2809 \times 0,91^n + 3100)$.

2. Avec ce modèle, on a

$$v_{12} = \frac{1}{3} (-2809 \times 0,91^{12} + 3100) \approx 731$$

Selon ce modèle, le 13 juin 2018, le nombre de chenilles serait d'environ 73 100.

3. Pour tout entier naturel n , on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{3} (-2809 \times 0,91^{n+1} + 3100) - \frac{1}{3} (-2809 \times 0,91^n + 3100) \\ &= \frac{1}{3} \times (-2809) (0,91^{n+1} - 0,91^n) \\ &= -\frac{2809}{3} \times 0,91^n (0,91 - 1) \\ &= -\frac{2809}{3} \times 0,91^n \times (-0,09) \\ &= 84,27 \times 0,91^n > 0 \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc strictement croissante.

Partie 3

On a $u_{12} \approx 34\,121$ et $v_{12} \approx 731$. v_{12} est plus proche de 745 que u_{12} . Le modèle 2 paraît donc le plus adapté.

Lösung der Aufgabe n° 4 : Probabilités et suites

1. (a) $P(G_1) = \frac{1}{2}$ et $P(\overline{G_1}) = \frac{1}{2}$.
 (b)

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_2 \cap G_1) + P(G_2 \cap \overline{G_1}) \\ &= P(G_2|G_1) \cdot P(G_1) + P(G_2|\overline{G_1}) \cdot P(\overline{G_1}) \\ &= 0,6 \cdot \frac{1}{2} + 0,3 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0,3 + 0,15 \\ &= 0,45. \end{aligned}$$

$$P(\overline{G_2}) = 1 - P(G_2) = 1 - 0,45 = 0,55$$

2. (a) En s'aidant d'un arbre pondéré, on peut démontrer que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(G_{n+1}) = P(G_{n+1}|G_n) \cdot P(G_n) + P(G_{n+1}|\overline{G_n}) \cdot P(\overline{G_n}) \\ &= 0,6u_n + 0,3v_n \\ v_{n+1} &= P(\overline{G_{n+1}}) = P(\overline{G_{n+1}}|G_n) \cdot P(G_n) + P(\overline{G_{n+1}}|\overline{G_n}) \cdot P(\overline{G_n}) \\ &= 0,4u_n + 0,7v_n \end{aligned}$$

- (b) Montrons que la suite $(u_n + v_n)$ est constante :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + v_{n+1} &= (0,6u_n + 0,3v_n) + (0,4u_n + 0,7v_n) \\ &= 0,6u_n + 0,4u_n + 0,3v_n + 0,7v_n \\ &= u_n + v_n. \end{aligned}$$

Donc, la suite $(u_n + v_n)$ est constante et égale à $P(G_1) + P(\overline{G_1}) = 1$.

On peut aussi remarquer que pour tout n entier naturel, $P(\overline{G_n}) = 1 - P(G_n)$, donc que $v_n = 1 - u_n$ et donc $u_n + v_n = 1$

- (c) Démontrons que la suite $(4u_n - 3v_n)$ est géométrique :

$$\begin{aligned} 4u_{n+1} - 3v_{n+1} &= 4(0,6u_n + 0,3v_n) - 3(0,4u_n + 0,7v_n) \\ &= 2,4u_n + 1,2v_n - 1,2u_n - 2,1v_n \\ &= 1,2u_n - 0,9v_n \\ &= 0,3(4u_n - 3v_n). \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(4u_n - 3v_n)$ est géométrique de raison 0,3.

3. (a) Pour déterminer la probabilité que Julia gagne le troisième jeu :

$$\begin{array}{lll} u_1 = \frac{1}{2} & u_2 = 0,6 \cdot \frac{1}{2} + 0,3 \cdot \frac{1}{2} = 0,45 & u_3 = 0,6 \cdot 0,45 + 0,3 \cdot 0,55 = 0,435 \\ v_1 = \frac{1}{2} & v_2 = 0,4 \cdot \frac{1}{2} + 0,7 \cdot \frac{1}{2} = 0,55 & v_3 = 0,4 \cdot 0,45 + 0,7 \cdot 0,55 = 0,565 \end{array}$$

Donc la probabilité que Julia gagne le troisième jeu est 0,435

- (b) $0,435 < 0,5$, donc Julia a moins de chance de gagner au troisième jeu que Lucie.

- (c) $-1 < 0,3 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^n = 0$

Donc par produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5 \times 0,3^{n-1} = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7u_n = 3$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{7}$. Ainsi, si Julia et Lucie jouent un très grand nombre de jeux, la probabilité que Julia gagne le dernier jeu se rapproche de $\frac{3}{7}$.