

Contrôle n° 7 :

Variables aléatoires et Probabilités conditionnelles

• • Vendredi 5 avril 2024 • •

La calculatrice est autorisée.

Consigne : mettre son nom sur ce sujet et le rendre avec la copie.

Une feuille de brouillon est autorisée.

Nom :

Prénom :

Classe : 1^{re} ES

Le barème est donné à titre **indicatif**.

Exercice n° 1 : Applications du cours (5 points)

Les questions suivantes sont indépendantes. Aucune justification n'est attendue.

1. Soient A et B deux événements tels que $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ et $P_A(B) = 0,25$. Que vaut $P(A)$?

2. Voici un digicode permettant d'ouvrir une porte. Il faut taper, dans l'ordre, deux lettres (éventuellement identiques) et deux chiffres (qui doivent être différents). On choisit un code au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il y ait deux lettres identiques ?



3. Soit X une variable aléatoire dont on donne la loi de probabilité dans le tableau suivant.

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,5	0,3

Calculer la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X .

Exercice n° 2 : Vrai ou Faux sans justification (2 points)

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, **sans justifier**.

Un lecteur est passionné de romans policiers et de biographies. Une bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies, en lui précisant que 40 % des écrivains de romans policiers sont français, et que 47,5 % des écrivains sont français.

Le lecteur choisit au hasard un livre dans cette bibliothèque parmi les 200 ouvrages, romans policiers ou biographies.

Affirmation 1 : La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est $\frac{2}{75}$.

Affirmation 2 : Le lecteur choisit une biographie. La probabilité que le lecteur ait choisi un livre d'un écrivain français est 0,7.

Exercice n° 3 : une tombola (8 points)

On dispose d'un panier dans lequel on a placé quatre billets marqués « A » et deux billets marqués « B ». On possède par ailleurs deux urnes, nommées A et B . Dans l'urne A sont placés dix jetons marqués « Perdant » et deux jetons marqués « Gagnant ». Dans l'urne B sont placés sept jetons marqués « Perdant » et cinq jetons marqués « Gagnant ». Un jeu est alors organisé en deux étapes :

- Le joueur tire au hasard un billet du panier.
- Si le joueur a tiré un billet marqué « A », alors il tire un jeton dans l'urne A . Si le joueur a tiré un billet marqué « B », alors il tire un jeton dans l'urne B .

On note A l'événement « le joueur a tiré du panier un billet A ».

On note B l'événement « le joueur a tiré du panier un billet B ».

On note G l'événement « le joueur a tiré un jeton marqué *Gagnant* ».

Tous les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. Construire un arbre pondéré qui décrit ce jeu.
2. (a) Calculer la probabilité de tirer un billet « Gagnant » qui se trouve dans l'urne A .
(b) Montrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\frac{1}{4}$.
(c) Le billet tiré est gagnant. Quelle est la probabilité qu'il soit tiré de l'urne A ?
3. Le joueur mise au départ 2 euros. S'il tire un jeton gagnant dans l'urne A , il reçoit 5 euros. S'il tire un jeton gagnant dans l'urne B , il reçoit 10 euros. Dans les autres cas, il ne reçoit rien. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique à l'issue du jeu.
(a) Quelles sont les valeurs prises par ce gain ?
(b) Montrer que $P(X = 3) = \frac{1}{9}$
(c) Établir la loi de probabilité de X .
(d) Déterminer l'espérance mathématique de X . Le jeu est-il avantageux pour le joueur ?

Exercice n° 4 : faux positifs (5 points)

Une maladie affecte une personne sur 1 000 parmi une population donnée. On dispose d'un test sanguin qui détecte la maladie avec une fiabilité de 99 % lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient aussi un résultat faussement positif pour 0,2 % des personnes saines testées. On choisit une personne au hasard.

Soit M l'événement « La personne choisie est malade » et T « La personne choisie a un test positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.
2. Calculer $P(T)$.
3. En déduire la probabilité de M sachant que l'événement T est réalisé. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?
4. Ce test est-il fiable ?