

Contrôle n° 5 :

Suites arithmético-géométriques et limites

• • Mercredi 7 février 2024 • •

Nom :

Prénom :

Classe : 1^{re} ES

La calculatrice **est autorisée**.

Consigne : mettre son nom sur ce sujet et le rendre avec la copie.

Le barème est donné à titre **indicatif**.

Exercice n° 1 : QCM (3 points)

Pour chacune des propositions suivantes, entourer la (ou les) bonne(s) réponse(s) (sans justification).
Toute bonne réponse rapporte un point. Toute mauvaise réponse retire un demi-point.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = 0,5u_n + 4$.

On considère également la suite (v_n) définie, pour tout nombre entier naturel n , par $v_n = u_n - 8$.

Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
On peut affirmer que	la suite (u_n) est géométrique	la suite (v_n) est géométrique	la suite (u_n) est arithmético-géométrique	la suite (v_n) est arithmético-géométrique
Pour tout nombre entier naturel n ,	$v_n = 3 \times 0,5^n$	$v_n = -5 \times 0,5^n$	$u_n = 3 \times 0,5^n$	$u_n = -5 \times 0,5^n$
On note ℓ la limite de la suite (v_n) . Alors la limite de la suite (u_n) est	ℓ	$\ell - 8$	$\ell + 8$	8

Exercice n° 2 : Vrai / Faux sans justification (2 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 500$ et, pour tout nombre entier naturel n , par $u_{n+1} = 0,5u_n$

Écrire (sur la copie) si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse sans justifier :

1. Il existe un nombre entier naturel n tel que $u_n < 100$.
2. Pour tout nombre entier naturel n , $u_n < 100$
3. Il existe un nombre entier naturel n tel que $u_n = 0$.
4. Il existe un nombre entier naturel p tel que, pour tout nombre entier naturel $n \geq p$, $u_n < 5$

Exercice n° 3 : une suite arithmético-géométrique à trouver ! (4 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = au_n + 4$, où a est un nombre réel donné.

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout nombre entier naturel n , par $v_n = u_n - 6$.

1. Déterminer la valeur de a pour que la suite (v_n) soit une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Exprimer v_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (v_n)
3. Dédire de la question précédente l'expression de u_n en fonction de n et la limite de la suite (u_n) .

Exercice n° 4 : calculs de limites (3 points)

Les questions suivantes sont indépendantes. Vous justifierez brièvement les raisonnements.

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4n^2 - 18n + 25$$

2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

3. Déterminer la limite de la suite (w_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{3n^2 + 6n - 5}$$

Exercice n° 5 : une suite arithmético-géométrique à étudier (8 points)

Au premier janvier 2018, une association comptait 2 500 adhérents. Une étude a permis de modéliser l'évolution future du nombre d'adhérents de l'association. Chaque mois :

- 4 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 80 nouvelles personnes adhèrent à l'association.

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une estimation du nombre d'adhérents de l'association n mois après le 1^{er} janvier 2018.

1. Justifier que la suite (u_n) définie par $u_0 = 2\,500$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,96u_n + 80$ modélise l'évolution mensuelle du nombre d'adhérents de l'association.
2. Cette suite (u_n) est-elle arithmétique ? Justifier.
3. Cette suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifier.
4. Exprimer u_n en fonction de n (on introduira une suite auxiliaire bien choisie grâce à une propriété de cours...)
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
6. (Bonus) Le montant de la cotisation mensuelle à l'association est de 10 euros. Calculer la somme totale, arrondie à la centaine d'euros près, que l'association espère obtenir pour l'année 2018.