

Contrôle n° 4 :

Suites arithmétiques et géométriques

• • Mercredi 20 décembre 2023 • •

Nom :

Prénom :

Classe : 1^{ère} ES

La calculatrice **est autorisée**.

Consigne : mettre son nom sur ce sujet et le rendre avec la copie.

Exercice n° 1

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = \frac{2n}{3} + 1$

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
2. En déduire la nature de la suite (u_n)
3. Déterminer le premier terme de la suite (u_n) supérieur à 20.
4. Calculer

$$S = 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + \cdots + \frac{61}{3} + 21$$

Exercice n° 2

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $r = -10$

1. Quelle est la valeur de u_{300} ?
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Déterminer la somme des 21 premiers termes de la suite (u_n) ?

Exercice n° 3

Un étudiant désire acheter un ordinateur coûtant 1200 euros. Au 1^{er} janvier, il dispose d'un capital initial de 350 euros sur son compte. En faisant des économies, il arrive à placer 50 euros de plus chaque mois sur son compte. On appelle u_1 la valeur du capital disponible au 1^{er} janvier, u_2 la valeur du capital disponible au 1^{er} février, u_3 la valeur du capital disponible au 1^{er} mars, u_4 la valeur du capital disponible au 1^{er} avril, etc.

1. D'après l'énoncé, que vaut u_1 ?
2. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n ? Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
4. Exprimer u_n en fonction de l'entier n .
5. Calculer u_{10}
6. Déterminer, en justifiant, le nombre n de mois nécessaires pour obtenir les 1200 euros attendues.
7. En déduire la date à laquelle l'étudiant pourra acheter son ordinateur.

Exercice n° 4

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes :

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 3n$. Cette suite est-elle géométrique ? Justifier soigneusement.
2. On considère la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = \frac{7}{2^{n+1}}$. Cette suite est-elle géométrique ? Justifier soigneusement.
3. En 2012, une personne place 1000 euros sur un compte à intérêts composés au taux annuel de 2 %. En supposant qu'elle n'effectue ni retrait, ni apport, on note S_n le montant de la somme qui se trouve sur le compte au 2 janvier de l'année $2012 + n$, avec $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Préciser la nature de la suite (S_n) .
 - (b) Quel sera le capital disponible sur le compte en 2017 ?
(On arrondira le résultat à l'euro près)
 - (c) On suppose toujours que le taux annuel est de 2 % mais chaque année, la personne effectue un versement supplémentaire de 600 euros. Dans cette nouvelle modélisation, on note u_n le montant de la somme qui se trouve sur le compte au 2 janvier de l'année $2012 + n$, avec $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n (aucune justification particulière n'est attendue)
 - (d) La suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifier.

Exercice n° 5

On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \text{ et } v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique, dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n)$$

Bonus

La suite (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_4 = 1$ et $\frac{1}{u_1 \times u_2} + \frac{1}{u_2 \times u_3} = 2$

Déterminer u_0 et la raison r .