

Contrôle n° 2 :

Nombre dérivé et statistiques

• • Mercredi 18 octobre 2023 • •

Nom :

Prénom :

Classe : 1^{ère} ES

La calculatrice **est autorisée**.

Consigne : Rendre ce sujet et la feuille annexe avec la copie.

Mettre son nom sur ce sujet et la feuille annexe.

Exercice n° 1 : calcul d'un nombre dérivé

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 4[\cup] 4 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 4}$$

La fonction f est-elle dérivable en 2? Justifier soigneusement la réponse.

Exercice n° 2 : nombre dérivé en économie

L'entreprise Aspirotou fabrique des aspirateurs. Chaque mois, elle produit entre 500 et 6 000 aspirateurs. Le coût de production, exprimé en euros, de x aspirateurs est donné par

$$C(x) = 0,003x^2 + 60x + 48\,000$$

1. Quel est le coût de production exact de 1 000 aspirateurs? de 1 001 aspirateurs?
En déduire l'augmentation du coût entraînée par la fabrication du 1 001^e aspirateur.
2. On appelle *coût marginal* au rang x la différence $C(x+1) - C(x)$. On note $d(x)$ cette différence.
 - (a) Interpréter (par une phrase) ce que désigne le coût marginal.
 - (b) Quel est le coût marginal au rang 1 000?
 - (c) La fonction C est dérivable en $x_0 = 1000$. Calculer $C'(1000)$.
 - (d) Calculer $d(1000) - C'(1000)$. Que constate-t-on?

Exercice n° 3 : nombre dérivé, approche de la fonction dérivée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 5x + 2$$

Dans cet exercice, on souhaite déterminer une formule générale du nombre dérivé en un point d'abscisse $x \in \mathbb{R}$. On va donc calculer le nombre dérivé pour x réel quelconque.

1. Soit h un réel non nul. Calculer $f(x+h) - f(x)$.
2. En déduire la limite (en fonction de x) du taux de variation entre $x+h$ et x , et donner une expression de $f'(x)$ en fonction de x .
3. **Application** : En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse 3.
4. Déterminer les équations des tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = 4x$.

Remarque : On rappelle la propriété suivante :

Deux droites (non parallèles à l'axe des ordonnées) sont parallèles
si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Exercice n° 4 : statistiques descriptives

On considère (en annexe) le tableau des notes obtenues par une classe de seconde de 35 élèves au dernier contrôle de mathématiques

1. Quelle est la population étudiée ?
2. Quel est l'échantillon étudié ?
3. Quel est le mode de cette série statistique ?
4. Quelle est l'étendue de cette série statistique ?
5. Quelle est la fréquence des élèves qui ont obtenu 13 ?
 - (a) Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
 - (b) Donner le résultat sous la forme d'un pourcentage arrondi au centième.
6. Quelle est la moyenne de la classe ? Vous pourrez vous aider d'une colonne libre du tableau.
7. Calculer les effectifs cumulés croissants dans la troisième colonne du tableau.
8. Déterminer la médiane de la série statistique. Interpréter le résultat obtenu.
9. Déterminer le premier et le troisième quartiles de la série. Calculer l'écart interquartile. Interpréter le résultat obtenu.
10. Déterminer l'écart-type de cette série. Vous pourrez vous aider d'une colonne libre du tableau.

Exercice n° 5 : augmentation de salaire

En 2023, on a relevé dans le tableau suivant les salaires mensuels moyens (en euros) de tous les employés d'une entreprise en fonction de leur catégorie socio-professionnelle :

	Ouvrier	Ouvrier qualifié	Cadre	Cadre supérieur	Dirigeant
Salaire	1 200	1 350	1 500	3 000	3 750
Effectif	40	29	12	3	1

En 2024, tous les salaires ont été augmentés de 1 %. De plus, 16 ouvriers, 10 ouvriers qualifiés et 4 cadres ont été embauchés.

Calculer le salaire mensuel moyen pour l'ensemble des employés de l'entreprise en 2024 et le comparer à celui de 2023. Comment expliquer ce phénomène ?

Exercice n° 6 : valeur manquante...

On considère la série statistique suivante, comportant 10 nombres entiers, chacun compris entre 1 et 10 inclus. Voici les dix nombres : $1 / 1 / 1 / 4 / 6 / 6 / 6 / 8 / 10 / x$.

Il n'y a qu'une seule valeur de x entre 1 et 10 pour laquelle la moyenne de la série est entière. Tom dit qu'alors l'écart-type est aussi entier. Tom a-t-il raison ? Justifier **soigneusement** la réponse.

Exercice n° 7 : bonus

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$. On définit le point A de la parabole d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ et on note $\mathcal{T}$ la tangente à la parabole en A . Par ailleurs, on note P le point de l'axe des abscisses de même abscisse que A . Montrer que $\mathcal{T}$ coupe le segment $[OP]$ en son milieu, où O est l'origine du repère.

Annexe pour l'exercice n° 4

Nom :

Prénom :

Classe : 1^{ère} ES

Notes	Nombre d'élèves ayant obtenu cette note	Effectifs cumulés croissants		
0	0			
1	0			
2	0			
3	1			
4	1			
5	1			
6	1			
7	1			
8	2			
9	2			
10	2			
11	3			
12	3			
13	6			
14	2			
15	3			
16	2			
17	2			
18	2			
19	1			
20	0			
Total				