

Exercice sur les suites arithmético-géométriques : en français

Un capital de 400 € est investi sur un compte au 1^{er} janvier 2000, avec un taux d'intérêt annuel de 2,5 %. À la fin de chaque année, un montant supplémentaire de 50 € est déposé. Soit K_n le capital en euros au 1^{er} janvier de l'année $(2000 + n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $K_0 = 400$

- Calculez K_1 et K_2 .
 - Exprimez K_{n+1} en fonction de K_n .
- On souhaite calculer directement la valeur du capital au 1^{er} janvier 2020, si les conditions d'épargne restent inchangées. On définit pour cela une nouvelle suite (u_n) par $u_n = K_n + 2000$ pour tout nombre naturel.
 - Calculez u_0 , u_1 et u_2 .
 - Montrez que (u_n) est une suite géométrique.
 - Exprimez u_n en fonction de n . En déduire l'expression de K_n en fonction de n .
 - Quelle sera la valeur du capital (arrondie à 1 centime) au 1^{er} janvier 2020 ?
- En quelle année (au 1^{er} janvier) le capital dépassera-t-il la somme de 1000 €, en maintenant les conditions d'épargne inchangées? *Obtenez le résultat par un calcul analytique plutôt que par essais successifs.*
- À quel taux d'intérêt $p\%$ le capital initial de 400 € devrait-il être investi pour atteindre 1000 € au 1^{er} janvier 2010, sans le dépôt annuel de 50 €? La valeur de p doit être déterminée avec une précision d'une décimale.

Exercice sur les suites arithmético-géométriques : en allemand

Auf einem Konto ist am 1. Januar 2000 ein Kapital von 400 €. Es wird jährlich mit 2,5 % verzinst. Am Ende jeden Jahres werden noch zusätzlich 50 € eingezahlt. Sei K_n das Kapital in Euro am 1. Januar des Jahres $(2000 + n)$, $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $K_0 = 400$.

- Berechnen Sie K_1 und K_2 .
 - Drücken Sie K_{n+1} abhängig von K_n aus.
- Man beabsichtigt die Höhe des Kapitals am 1. Januar 2020 direkt zu berechnen, falls die Sparbedingungen unverändert bleiben. Man definiert dafür eine neue Folge (u_n) durch $u_n = K_n + 2000$ für alle natürlichen Zahlen.
 - Berechnen Sie u_0 , u_1 und u_2 .
 - Beweisen Sie, dass (u_n) eine geometrische Folge ist.
 - Drücken Sie u_n in Abhängigkeit von n aus. Leiten Sie daraus den Ausdruck von K_n in Abhängigkeit von n her.
 - Wie hoch wird das Kapital (auf 1 Cent gerundet) am 1. Januar 2020 sein ?
- In welchem Jahr (am 1. Januar) wird das Kapital bei gleichbleibenden Sparbedingungen die Summe von 1000 € überschreiten? *Das Ergebnis ist hier durch eine analytische Rechnung und nicht durch Probieren zu erhalten.*
- Zu welchem Zinssatz $p\%$ sollte das Anfangskapital von 400 € angelegt werden, um am 1. Januar 2010, ohne die jährliche Zuzahlung von 50 €, auf 1000 € zu wachsen? Die Zahl p ist auf Zehntel genau zu bestimmen.