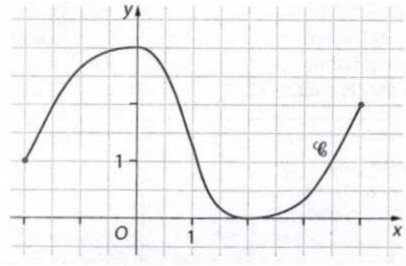


Séquence 5 – Calcul intégral – généralités

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $[-2 ; 4]$ dont voici la courbe représentative :

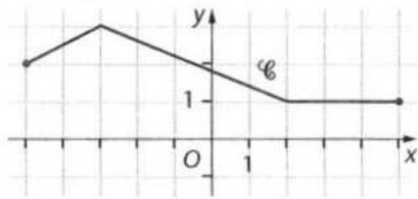


Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\int_{-2}^4 f(x) dx = \int_{-2}^4 f(t) dt$
2. $\int_{-2}^0 f(x) dx \geq 4$
3. $\int_2^4 f(x) dx \leq 2$
4. $\int_0^2 f(x) dx \leq 2$
5. $\int_{-2}^1 f(x) dx \geq 6$

Exercice 2

La courbe $\mathcal{C}$ suivante est formée de segments. Elle représente une fonction f définie sur $[-5 ; 5]$



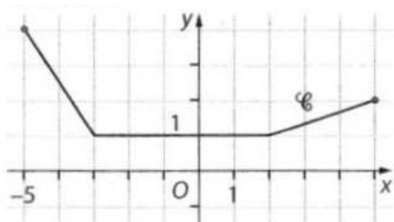
1. Calculer les intégrales :

$$\bullet \int_{-5}^{-3} f(x) dx \quad \bullet \int_{-3}^{-2} f(x) dx \quad \bullet \int_{-2}^5 f(x) dx$$

2. En déduire la valeur de $\int_{-5}^5 f(x) dx$

Exercice 3

La courbe $\mathcal{C}$ suivante est formée de segments. Elle représente une fonction f définie sur $[-5 ; 5]$.



Calculer l'intégrale $\int_{-5}^5 f(t) dt$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

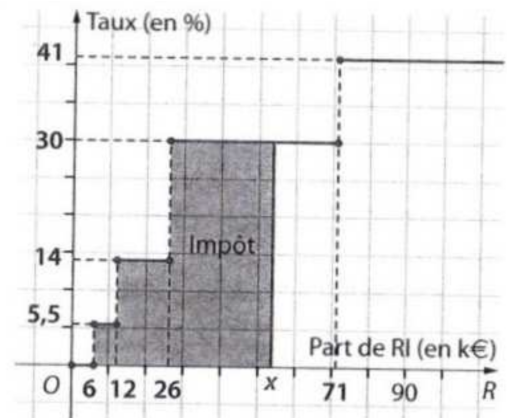
$$f(x) = \begin{cases} -0,5x + 1 & \text{si } x \in]-\infty ; 2] \\ 2x - 4 & \text{si } x \in]2 ; +\infty[\end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Représenter graphiquement la fonction f sur $[-1 ; 4]$. La fonction f est-elle continue et positive sur $\mathbb{R}$?
2. Calculer $\int_{-1}^4 f(x) dx$
3. En déduire l'aire, en cm^2 , du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = -1$ et $x = 4$.

Exercice 5

Le graphique ci-dessous indique les tranches de revenu imposable par part, arrondies à un millier d'euros, et le taux marginal d'imposition :



1. (a) Justifier que l'impôt sur le revenu (noté IR), en k€, pour un revenu imposable R de 26 000 € est

$$IR = 6 \times 0,055 + (26 - 12) \times 0,14$$

- (b) Calculer le montant de l'impôt pour une part de revenu imposable de 71 k€.
2. Soit x un revenu imposable dans la tranche au taux marginal de 30 %.
 - (a) Donner une interprétation graphique de $\int_{26}^x 0,3 dR$
 - (b) Exprimer cette intégrale en fonction de x .
 - (c) En déduire l'expression de l'impôt IR en fonction du revenu x dans $[26 ; 71]$.

Séquence 5 – Calculs de primitives



Exercice 6

Vérifier que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle donné.

1. sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (3x + 1)^2 \text{ et } F(x) = 3x^3 + 3x^2 + x$$

2. sur $]0 ; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} \text{ et } F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

3. sur $]0 ; +\infty[$,

$$f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} \text{ et } F(x) = -4\sqrt{x}$$



Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.



Exercice 8

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (6x - 5)^3$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f sur son ensemble de définition.



Exercice 9

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{(3x - 5)^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f sur chaque intervalle de son ensemble de définition.



Exercice 10

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x + 1}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f sur son ensemble de définition.



Exercice 11

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{3x - 4}{(3x - 5)^3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq \frac{5}{3}$, $f(x) = \frac{a}{(3x - 5)^2} + \frac{b}{(3x - 5)^3}$.
3. En déduire l'ensemble des primitives de f sur son ensemble de définition.
4. Quelle est la primitive qui vaut 1 pour $x = 0$?



Exercice 12

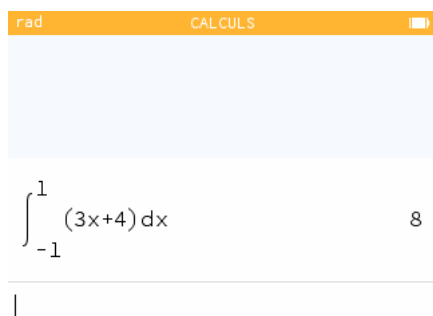
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x - 2}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $]2 ; +\infty[$ par $F(x) = (ax + b)\sqrt{x - 2}$ soit une primitive de f sur $]2 ; +\infty[$.

Séquence 5 – Calcul intégral – Calculs exacts d'intégrales

Exercice 13

Vérifier l'affichage obtenu à l'écran d'une calculatrice :



Exercice 14

Dans chaque cas, déterminer $\int_2^5 f(x) dx$ lorsque f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 2x - 3$
- $f(x) = 6 - x$

Exercice 15

Démontrer les propriétés suivantes : soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a ; b]$.

Soit F une primitive de f sur $[a ; b]$.

Soit G une primitive de g sur $[a ; b]$.

On a les propriétés suivantes :

- pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.
- La relation de Chasles (à énoncer et démontrer)
- Formule de linéarité n° 1 :

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

- Formule de linéarité n° 2 :

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

Exercice 16

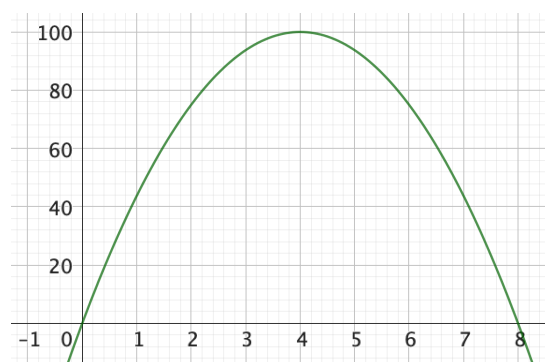
Dans un cadre économique, on appelle *fonction de satisfaction* toute fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'intervalle $[0 ; 100]$.

On dit qu'il y a *saturation* lorsque la satisfaction est maximale, c'est-à-dire que f prend la valeur 100.

On définit de plus la fonction *envie*, notée v , dérivée de la fonction f . On dit qu'il y a *envie* lorsque v est positive. Sinon, on dit qu'il y a *rejet*.

Partie A

On donne ci-dessous l'allure de la courbe représentative d'une fonction de satisfaction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 8]$.



- Pour quelle quantité x de produit y a-t-il saturation ?
 - Sur quel(s) intervalle(s) y a-t-il envie ? Y a-t-il rejet ?
- Par lecture graphique, donner $v(4)$
 - Exprimer $v(x)$ en fonction de x sachant que v est une fonction affine définie sur l'intervalle $[0 ; 8]$ vérifiant $v(0) = 50$.

Partie B

La fonction *envie* v pour un salaire dans une entreprise est modélisée, pour tout x de $[0 ; +\infty[$ par $v(x) = \frac{100}{(x+1)^2}$ où x désigne le salaire annuel d'un employé en milliers d'euros.

- Sachant que $f(0) = 0$, montrer que

$$f(x) = \frac{100x}{x+1}$$

- Étudier le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de f .
 - Interpréter le sens de variation de f en grâce à la notion de satisfaction.

Séquence 5 – Calcul intégral – applications

Aire entre deux courbes

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{3}x - 1$$

1. Déterminer $I = \int_{-3}^6 f(x) dx$.
2. Quelle est l'aire (en u.a.) de la portion de plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 6$.

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + 6$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

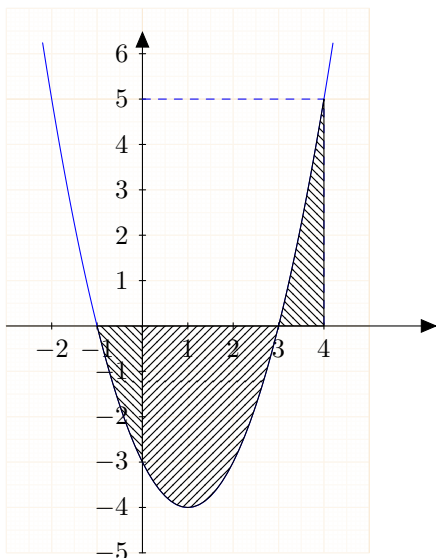
$$g(x) = x^2 - 2x + 2$$

Déterminer l'aire la portion de plan délimitée par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$



Déterminer l'aire de la portion de plan hachurée.

Valeur moyenne

Exercice 20

Déterminer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

Exercice 21

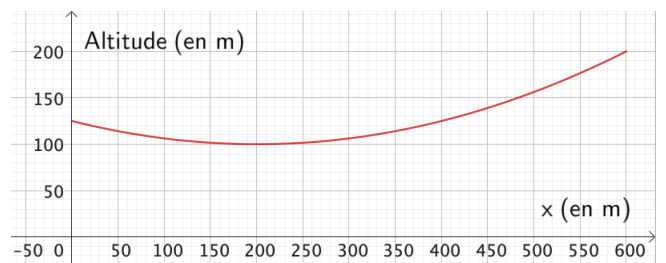
1. Calculer la valeur moyenne sur $[0 ; 6]$ de la fonction f telle que $f(t) = 6t^2 - t^3$.
2. Lors d'une épidémie de grippe dans un lycée, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premier cas, est donnée par la fonction f précédente.
 - a) Déterminer le nombre moyen de malades journalier sur cette période de 6 jours.
 - b) Construire la représentation graphique de la fonction f et donner une interprétation graphique du nombre moyen de malades sur cette période.

Exercice 22

Un terrain a le profil indiqué ci-dessous, modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 600]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{1600} - \frac{x}{4} + 125$$

où x est l'abscisse en mètres d'un point du terrain et $f(x)$ en altitude en mètres.



1. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0 ; 600]$
2. On souhaite niveler le terrain de façon que les remblais équilibrent les déblais. Préciser à quelle hauteur doit être situé le terrain nivelé.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1

1. Vrai, la variable est muette.
2. Vrai, en comptant le nombre d'unités d'aires.
3. Vrai.
4. Faux.
5. Vrai.

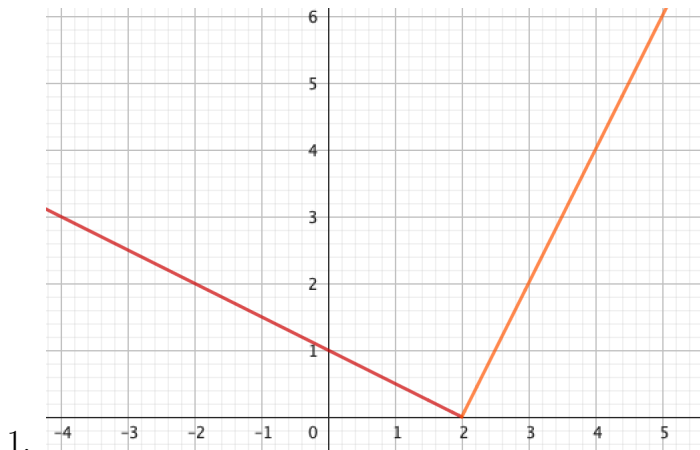
Solution de l'exercice 2

1.
 - $\int_{-5}^{-3} f(x) dx = 5$
 - $\int_{-3}^2 f(x) dx = 10$
 - $\int_2^5 f(x) dx = 3$
2. Donc $\int_{-5}^5 f(x) dx = \int_{-5}^{-3} f(x) dx + \int_{-3}^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = 5 + 10 + 3 = 18$.

Solution de l'exercice 3

$$\begin{aligned}\int_{-5}^5 f(t) dt &= \int_{-5}^{-3} f(t) dt + \int_{-3}^2 f(t) dt + \int_2^5 f(t) dt \\ &= 5 + 5 + 5 \\ &= 15\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4



- 1.
- 2.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^4 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\ &= 1 + 1 + 3 \\ &= 5\end{aligned}$$

3. Ainsi, puisque l'unité graphique est 2 cm, une unité d'aire est $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$, et l'aire cherchée est $5 \times 4 = 20 \text{ cm}^2$.

Solution de l'exercice 5

Solution de l'exercice 6

1. F est une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
 $F'(x) = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2 = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.
 $F'(x) = 2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right)$

$$\begin{aligned}&= 2 \left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \\ &= \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 7 $F(x) = \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 5x^2 - 3x$, car pour tout réel x , $F'(x) = f(x)$.

Donc $\phi(x) = \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 5x^2 - 3x + k$.

Solution de l'exercice 8 On peut essayer avec $F(x) = (6x - 5)^4$.

$$\begin{aligned}\text{On a alors } F'(x) &= 4(6x - 5)^3 \times 6 \\ &= 24(6x - 5)^3 \\ &= 24f(x)\end{aligned}$$

Ainsi, on a $F(x) = \frac{1}{24}(6x - 5)^4$, car pour tout réel x ,
 $F'(x) = \frac{1}{24} \times 24f(x) = f(x)$.

Donc $\phi(x) = \frac{1}{24}(6x - 5)^4 + k$

Solution de l'exercice 9

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\} =]-\infty; \frac{5}{3}[\cup]\frac{5}{3}; +\infty[$.
2. On peut essayer avec $F(x) = \frac{1}{3x - 5}$.

$$\text{On a alors } F'(x) = \frac{-3}{(3x - 5)^2} = -3f(x).$$

Ainsi, on a $F(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3x - 5}$, car pour tout réel x , $F'(x) = -\frac{1}{3} \times (-3)f(x) = f(x)$.

$$\text{Donc } \phi(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3x - 5} + k$$

Solution de l'exercice 10

1. On a $D_f =]-\frac{1}{5}; +\infty[$.

O

2. n peut essayer avec $F(x) = \sqrt{5x + 1}$.

$$\begin{aligned}\text{On a alors } F'(x) &= \frac{5}{2\sqrt{5x+1}} \\ &= \frac{5}{2}f(x)\end{aligned}$$

Ainsi, on a $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{5x+1}$, car pour tout réel x , $F'(x) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{2}f(x) = f(x)$.

$$\text{Donc } \phi(x) = \frac{2}{5}\sqrt{5x+1} + k$$

Solution de l'exercice 11

1. Il ne faut pas que $3x - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{3}$.

$$\text{D'où } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{3} \right\} =]-\infty; \frac{5}{3}[\cup]\frac{5}{3}; +\infty[.$$

2. On a

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{a}{(3x-5)^2} + \frac{b}{(3x-5)^3} \\ &= \frac{a(3x-5) + b}{(3x-5)^3} \\ &= \frac{3ax - 5a + b}{(3x-5)^3}\end{aligned}$$

Il vient que

$$\begin{aligned}\begin{cases} 3a &= 3 \\ -5a + b &= -4 \end{cases} &\iff \begin{cases} a &= 1 \\ -5 + b &= -4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 1 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \forall x \neq \frac{5}{3}, f(x) = \frac{1}{(3x-5)^2} + \frac{1}{(3x-5)^3}.$$

3. Si $F(x) = \frac{1}{3x-5} + \frac{1}{(3x-5)^2}$, on a $F'(x) = \frac{-3}{(3x-5)^2} + \frac{-2(3x-5) \times 3}{(3x-5)^4} = \frac{-3}{(3x-5)^2} + \frac{-6}{(3x-5)^3}$.

Ainsi, avec $F(x) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3x-5}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{(3x-5)^2}\right)$, on a la dérivée suivante :

$$\begin{aligned}F'(x) &= -\frac{1}{3} \times \frac{-3}{(3x-5)^2} - \frac{1}{6} \times \frac{-2(3x-5) \times 3}{(3x-5)^4} = \\ &= \frac{1}{(3x-5)^2} + \frac{1}{(3x-5)^3} = f(x).\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \phi(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3x-5} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{(3x-5)^2} + k.$$

$$\begin{aligned}\phi(0) = 1 &\iff -\frac{1}{3} \times \frac{1}{-5} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{25} + k = 1 \\ &\iff \frac{1}{15} - \frac{1}{150} + k = 1 \\ &\iff k = 1 - \frac{1}{15} + \frac{1}{150} \\ &\iff k = \frac{47}{50}\end{aligned}$$

D'où la primitive recherchée est

$$\phi(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3x-5} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{(3x-5)^2} + \frac{47}{50}$$

Solution de l'exercice 12

1. Il faut que $x - 2 > 0 \iff x > 2$. D'où $D_f =]2; +\infty[$.

2. Si $F(x) = (ax+b)\sqrt{x-2}$, alors $F'(x)$ est de la forme :

$$\begin{aligned}F'(x) &= a\sqrt{x-2} + (ax+b) \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{2a(x-2) + ax+b}{2\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{2ax - 4a + ax + b}{2\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{3ax - 4a + b}{2\sqrt{x-2}}\end{aligned}$$

$$\text{Cependant, la fonction est définie par } f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x-2}} = \frac{6x}{2\sqrt{x-2}}$$

$$\begin{aligned}\text{Il vient que } \begin{cases} 3a &= 6 \\ -4a + b &= 0 \end{cases} &\iff \\ \begin{cases} a &= 2 \\ -8 + b &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a &= 2 \\ b &= 8 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \phi(x) = (2x+8)\sqrt{x-2} + k.$$

Solution de l'exercice 15

1. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = 0$.

2. On a $\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b)$.

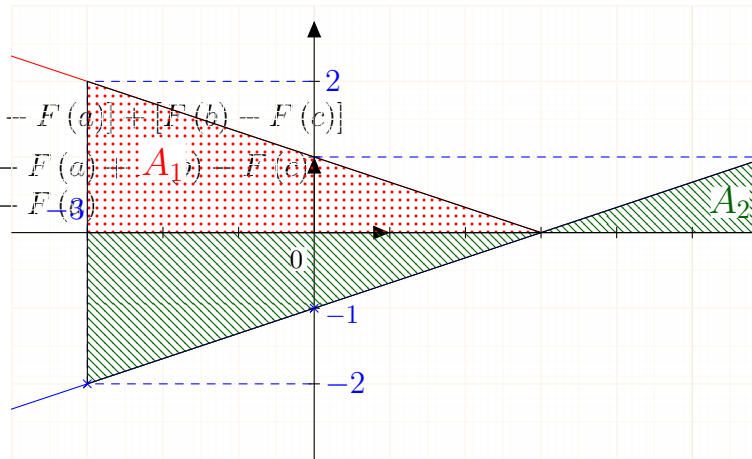
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b))$$

$$\begin{aligned}\text{D'où } \int_a^b f(x) dx &= -(F(a) - F(b)) = \\ &= -\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b).\end{aligned}$$

3. On a $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$.

De même, on a $\int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)]$
 $= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$
 $= F(b) - F(a)$

D'où $\int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx$.



4. On a $\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = (F + G)(b) - (F + G)(a)$. 2. f n'est pas positive sur $[-3 ; 6]$, donc $\int_{-3}^6 f(x) \, dx$ n'est pas une aire.

De même, $\int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx = [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)]$
 $= F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$
 $= F(b) + G(b) - F(a) - G(a)$
 $= (F + G)(b) - (F + G)(a)$

Si on cherche à calculer l'aire au-dessus de l'axe des abscisses, on a :

On a donc $\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = (F + G)(b) - (F + G)(a)$. Pour calculer « l'aire hachurée » en vert, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-3}^6 f(x) \, dx &= \int_{-3}^3 f(x) \, dx + \int_3^6 f(x) \, dx \\ &= -6 + \frac{3}{2}, \text{ car } C_f \text{ est en dessous de l'axe des abscisses sur } [-3 ; 3] \\ &= -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

5. On a $\int_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda F(b) - \lambda F(a)$.

De même, $\lambda \int_a^b f(x) \, dx = \lambda [F(b) - F(a)]$
 $= \lambda F(b) - \lambda F(a)$

Donc, on a $\int_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda \int_a^b f(x) \, dx$.

Solution de l'exercice 18

On a $f(x) - g(x) =$
 $=$
 $=$

De plus, $f(x) - g(x) = 0 \iff -2x^2 + 2x + 4 = 0$
 $\iff x = -1 \text{ ou } x = 2$

On a ainsi le tableau suivant :

x	-1	
$f(x) - g(x)$	$-$	$+$
Position	C_f est au-dessus de C_g	C_g est en-dessous de C_f

Solution de l'exercice 17

1. On a F la fonction définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ qui est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, car en effet, on a :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{6} \times 2x - 1 = \frac{1}{3}x - 1 = f(x)$.

On a $F(6) = \frac{1}{6} \times 36 - 6 = 0$ et $F(-3) = \frac{1}{6} \times 9 - 3 = -\frac{5}{2}$.

D'où $I = F(6) - F(-3) = -\frac{5}{2}$.

Interprétation géométrique

Ainsi, on cherche l'aire $\mathcal{A} = \int_{-1}^2 [f(x) - g(x)] \, dx$
 $= \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) \, dx$

On a $f(x) - g(x) = -2x^2 + 2x + 4$.

D'où $F(x) - G(x) = (F - G)(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x$.

On a alors $(F - G)(-1) = -\frac{7}{3}$ et $(F - G)(2) = \frac{20}{3}$.

Ainsi $\mathcal{A} = (F - G)(2) - (F - G)(-1) = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{27}{3} = 9$.

D'où l'aire de la portion de plan délimitée par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est de 9 u.a.

Solution de l'exercice 19

Signe de $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$+$	$-$	$+$

La fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ est une primitive de f .

On note A l'aire recherchée. Soit A_1 et A_2 les deux aires hachurée. On a $A = A_1 + A_2$.

On a $A_1 = -\int_{-1}^3 f(x) \, dx$ et $A_2 = \int_3^4 f(x) \, dx$.

- Calcul de A_1 .

On a $\int_{-1}^3 f(x) \, dx = F(3) - F(-1) = -9 - \frac{5}{3} = -\frac{32}{3}$.

- Calcul de A_2 .

On a $\int_3^4 f(x) \, dx = F(4) - F(3) = -\frac{20}{3} - (-9) = \frac{7}{3}$.

On a donc $A = \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = 13$ u.a. .

Si 1 unité d'aire = un grand carreau, alors $A = 13 \times 0,64 \text{ cm}^2 = 8,32 \text{ cm}^2$.

Si 1 unité d'aire = quatre petits carreaux, alors $A = 13 \times 1 \text{ cm}^2 = 13 \text{ cm}^2$.

Solution de l'exercice 21

- On a $f(t) = 6t^2 - t^3$.

On a alors $\mu = \frac{1}{6-0}\int_0^6 (6t^2 - t^3) \, dx$.

Une primitive de f est $F(t) = 6 \times \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4$.
 $= 2t^3 - \frac{1}{4}t^4$.

On a alors $F(6) = 2 \times 6^3 - \frac{1}{4}6^4 = 432 - 324 = 108$ et $F(0) = 0$.

D'où $\mu = \frac{1}{6} \times F(6) = \frac{1}{6} \times 108 = 18$.

Ainsi la valeur moyenne de f est 18.

- a) D'après la question précédente, il y a une moyenne de 18 malades sur cette période de 6 jours.

b)

Le pic de l'épidémie est obtenue au bout de 4 jours. Il est de 32 malades.