

Calcul intégral

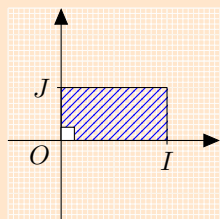
1. Définition et premiers calculs

Dans cette partie, on considère une fonction f positive et continue sur un intervalle $[a ; b]$, avec a et b deux réels tels que $a < b$.

■ DÉFINITION :

Soit $(O ; I, J)$ un repère **orthogonal**,
 I est le point de l'axe des abscisses tel que OI désigne une unité.
 J est le point de l'axe des ordonnées tel que OJ désigne une unité.

L'**unité d'aire**, notée u.a., est l'aire du rectangle défini par les points O, I et J , comme ci-contre :



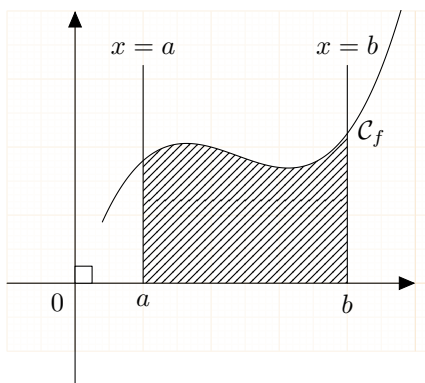
■ DÉFINITION :

Soit $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans le repère $(O ; I, J)$ précédemment défini.

L'**intégrale entre a et b de f** , notée $\int_a^b f(x) dx$, est l'aire, en unités d'aires, de la portion de plan délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

Exemple :

L'aire, en u.a., de la surface hachurée est $\int_a^b f(x) dx$.



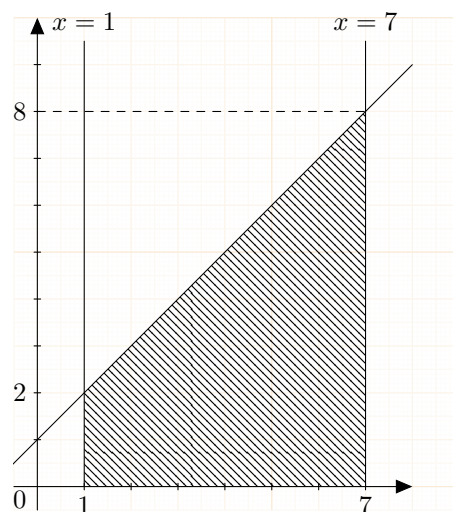
$\int_a^b f(x) dx$ est lue « intégrale de a à b de $f(x) dx$ », où a est la borne inférieure et b la borne supérieure de l'intégrale.

Remarque : x est une variable muette. On a donc

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$. La fonction est représentée ainsi :



On cherche à calculer $\mathcal{A} = \int_1^7 f(x) dx$.

$\mathcal{A}$ est la somme des aires du rectangle de largeur 2 et de longueur 7 et du triangle rectangle restant.

$$\text{On a } \mathcal{A} = 6 \times 2 + \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 30.$$

D'où $\mathcal{A} = 30$ u.a.

- Si l'unité de longueur est un grand carreau, soit 0,8 cm, alors $\mathcal{A} = 30 \times 0,64 \text{ cm}^2 = 19,2 \text{ cm}^2$.
- Si l'unité de longueur est deux petits carreaux, soit 1 cm, alors $\mathcal{A} = 30 \times 1 \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2$.

$$\text{On écrira } \int_1^7 f(x) dx = \int_1^7 (x + 1) dx = 30.$$

■ PROPRIÉTÉ :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$. On a :

- $\int_a^b f(x) dx$ est un nombre **positif**.
- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$



En allemand...

- L'intégrale : das Integral (-s, -e)

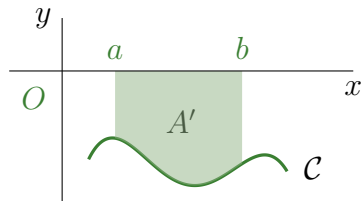
On définit aussi l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ dans le cas où la fonction n'est pas forcément positive sur $[a ; b]$.

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.
Si $f \leq 0$ sur l'intervalle $[a ; b]$, alors

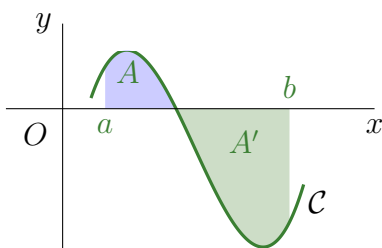
$$\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}'$$

où $\mathcal{A}'$ est l'aire de la surface du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, les droites $x = a$ et $x = b$.



Plus généralement, si f change de signe sur $[a ; b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = +\mathcal{A} - \mathcal{A}' + \dots$$



Remarque : Si f change de signe sur l'intervalle $[a ; b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ ne correspond plus à la valeur d'une aire sous une courbe.

2. Primitives

■ **THÉORÈME :** théorème fondamentale de l'analyse

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.
La fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a ; b]$ et pour tout $x \in [a ; b]$, $F'(x) = f(x)$.

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
 F est **une** primitive de f sur I si et seulement si

$$\begin{cases} F \text{ est dérivable sur } I. \\ \text{pour tout } x \in I, F'(x) = f(x). \end{cases}$$

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$.

Alors la fonction F définie par $F(x) = x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En effet, $F'(x) = 2x = f(x)$

Exemple :

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

On a ainsi $F'(x) = x^2 - 2x - 3 = f(x)$.

Donc F est **une** primitive de f sur $\mathbb{R}$.

En donner une autre : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 8$.

■ PROPRIÉTÉ :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. L'ensemble des primitives de f sur I est constitué des fonctions ϕ telles que pour tout $x \in I$, $F_k(x) = F(x) + k$, avec k une constante quelconque.
2. Soit $x_0 \in I$ et soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une et une seule primitive de f sur I tel que $F_k(x_0) = y_0$.

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - x + 3.$$

1. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$$

est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .

2. Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$. Plus généralement, toutes les fonctions F_k définies par $F_k(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + k$ où k est un réel quelconque sont aussi des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1. La condition supplémentaire se traduit par $F_k(1) = 0$, avec k un réel. Cette condition nous permet de déterminer la valeur de k correspondante $F_k(1) = 0$ si et seulement si $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 3 + k = 0$, c'est-à-dire $\frac{2}{6} - \frac{3}{6} + \frac{18}{6} + k = 0$, ou encore $k = -\frac{17}{6}$.
Donc la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1 est la fonction F définie par

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{17}{6}$$



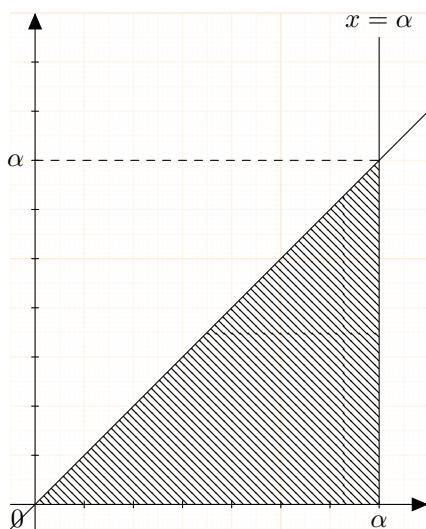
En allemand...

- une primitive : eine Stammfunktion

3. Intégrales et primitives

Exemple : Calcul de $\int_0^\alpha x \, dx$

Pour α un réel quelconque, on cherche $\int_0^\alpha x \, dx$.

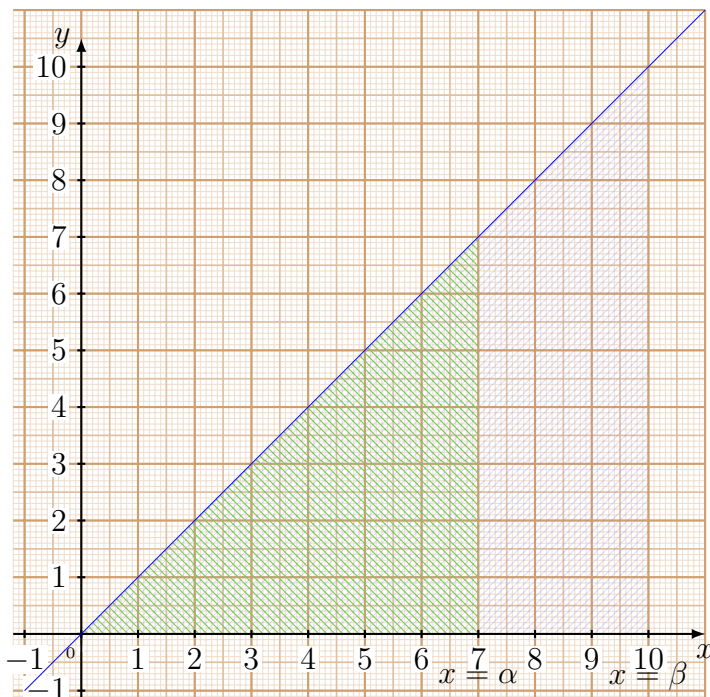


On calcule l'aire $\mathcal{A}$, qui est l'aire d'un triangle rectangle isocèle. On obtient

$$\int_0^\alpha x \, dx = \frac{1}{2}\alpha^2$$

Soit maintenant un nombre $\beta > \alpha$. Comme $\int_\alpha^\beta x \, dx = \int_0^\beta x \, dx - \int_0^\alpha x \, dx$, on en déduit que

$$\int_\alpha^\beta x \, dx = \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha^2$$



La différence $\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 = F(\beta) - F(\alpha)$ se note habituelle $[F(x)]_\alpha^\beta$. Ainsi

$$\int_\alpha^\beta f(x) \, dx = [F(x)]_\alpha^\beta$$

La formule mise en évidence ici est en fait générale, pour toute fonction continue sur $[\alpha; \beta]$ et relie donc un calcul d'intégrale d'une fonction à celui d'une primitive de cette fonction.

■ PROPRIÉTÉ :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Alors

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive **quelconque** de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$

Notation : On note $[F(x)]_b^a$ le nombre $F(b) - F(a)$. Ainsi

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_b^a = F(b) - F(a)$$

Exemple :

Retrouver le calcul de $\int_0^1 x^2 \, dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \, dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \times 1^3 - \frac{1}{3} \times 0^3 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exemple :

Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx &= \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemple :

Calculer $\int_{-2}^1 4x^3 + 3x - 1 \, dx$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 4x^3 + 3x - 1 \, dx &= \left[x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x \right]_{-2}^1 \\ &= \left((-2)^4 + \frac{3}{2}(-2)^2 - (-2) \right) \\ &\quad - \left(1^4 + \frac{3}{2}1^2 - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. Propriétés de l'intégrale

■ PROPRIÉTÉ : Linéarité de l'intégrale

Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a ; b]$, et si α et β sont deux nombres réels quelconques, alors

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Exemple :

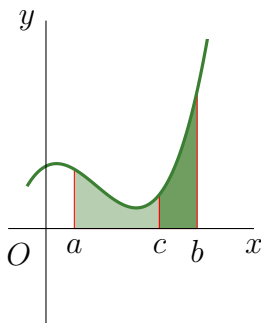
Si $f(x) = 2x^4 - 3x + 4$ et $g(x) = -3x + 4$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx &= \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_0^1 2x^4 dx \\ &= 2 \int_0^1 x^4 dx \\ &= 2 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right) \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

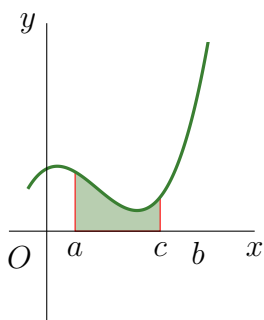
■ PROPRIÉTÉ : Relation de Chasles¹

Si la fonction f est continue sur l'intervalle I et si a , b et c sont trois réels de I , alors

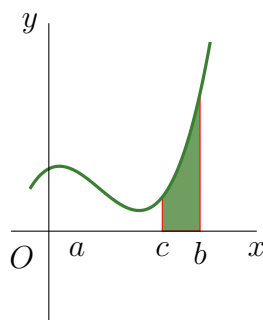
$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$



=



+



Exemple :

Que vaut $\int_0^4 f(x) dx$ sachant $\int_0^5 f(x) dx = 8$ et $\int_4^5 f(x) dx = 13$?

$$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx$$

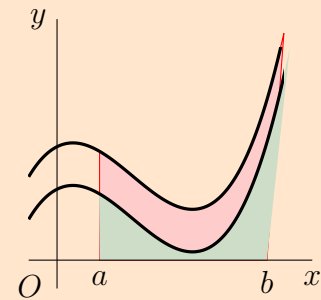
Donc

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^5 f(x) dx - \int_4^5 f(x) dx \\ &= 8 - 13 \\ &= -5 \end{aligned}$$

■ PROPRIÉTÉ : Comparaison d'intégrales

Si f et g sont continues sur l'intervalle $[a ; b]$ et si, pour tout $x \in [a ; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors

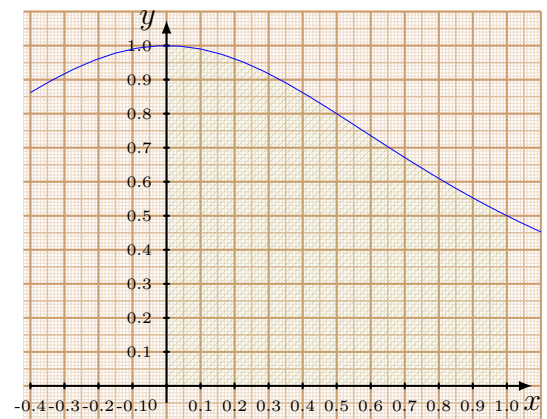
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$



Exemple :

Soit la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et g la fonction définie par $g(x) = 1$.

Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x) \leq g(x)$



Ainsi

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 g(x) dx$$

donc

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 1$$

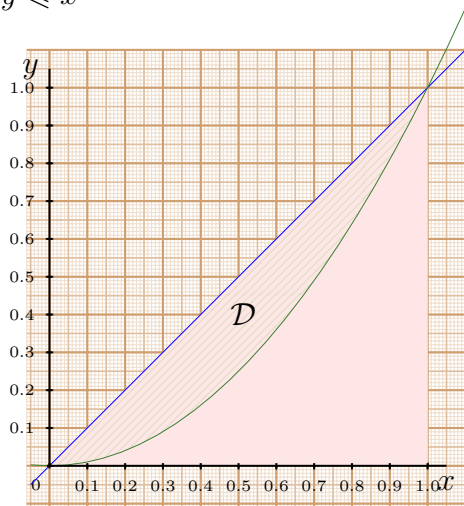
1. Michel Chasles (1793-1880) est un mathématicien français.

5. Applications du calcul intégral

A. Calcul de l'aire d'une surface comprise entre deux courbes

Exemple :

On veut calculer l'aire de la surface $\mathcal{D}$ définie par

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases} \text{ hachurée ci-dessous}$$


Soient les fonctions f et g définies respectivement par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Pour tout x dans l'intervalle $[0 ; 1]$, $g(x) \leq f(x)$. Ainsi, l'aire de la surface $\mathcal{D}$ est

$$\int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx$$

par linéarité de l'intégrale.

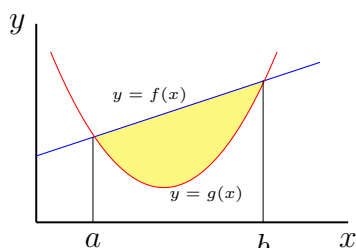
Donc l'aire de la surface $\mathcal{D}$ est :

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{6} \text{ u.a.}$$

■ PROPRIÉTÉ :

Si les fonctions f et g sont continues sur l'intervalle $[a ; b]$ et si pour tout x dans l'intervalle $[a ; b]$, $f(x) \geq g(x)$, c'est-à-dire si, sur l'intervalle $[a ; b]$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$, alors l'aire de portion de plan délimitée par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \text{ u.a.}$$



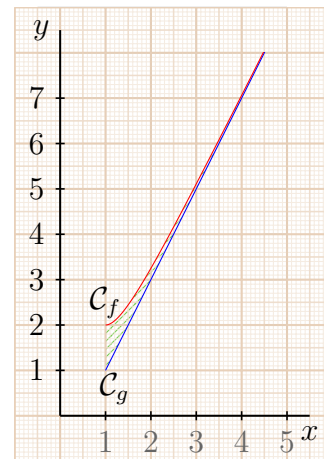
Exemple :

Soit f la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + 2x - 1$$

et g la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 2x - 1$$



On remarque, pour tout $x \in [1 ; +\infty[$,

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2}$$

Or, quel que soit $x \in [1 ; +\infty[$, $\frac{1}{x^2} > 0$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **au-dessus** de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Ainsi, l'aire de la surface délimitée par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$, les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ est

$$\begin{aligned} \int_1^3 (f(x) - g(x)) dx &= \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{x} \right]_1^3 \\ &= -\frac{1}{3} - (-1) \\ &= -\frac{1}{3} + 1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

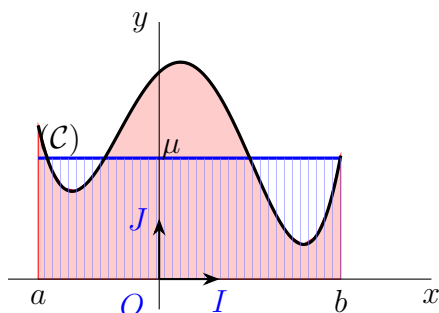
De même, l'aire de la surface délimitée par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$, les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$ (où α est un réel quelconque supérieure à 1) est

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha) &= \int_1^\alpha (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_1^\alpha \frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\alpha \\ &= -\frac{1}{\alpha} - (-1) \\ &= -\frac{1}{\alpha} + 1 \end{aligned}$$

Alors $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 1$. Cela signifie que l'aire de la surface délimitée par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$ **se rapproche de 1** dès que α devient grand.

B. Valeur moyenne d'une fonction

Considérons une fonction f continue sur l'intervalle $[a ; b]$ et g la fonction constante définie par $g(x) = \mu$, avec μ un réel quelconque.



On souhaite trouver la fonction g telle que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

où $g(x) = \mu$. Or

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b g(x) dx \iff \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \mu dx \\ &\iff \int_a^b f(x) dx = [\mu x]_a^b \\ &\iff \int_a^b f(x) dx = \mu b - \mu a \\ &\iff \int_a^b f(x) dx = \mu (b - a) \\ &\iff \mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

■ DÉFINITION :

Le réel $\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$ s'appelle **la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a ; b]$** .

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0 ; 2]$.

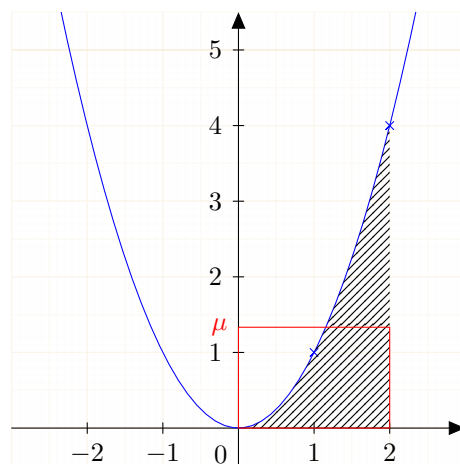
D'après le cours, $\mu = \frac{1}{2 - 0} \int_0^2 f(x) dx$

Une primitive de f est F définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.

On a alors $F(2) = \frac{8}{3}$ et $F(0) = 0$.

Ainsi $\int_0^2 f(x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = F(2) - F(0) = \frac{8}{3}$.

D'où $\mu = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$.



6. Formules à connaître

Fonction f	Une primitive F
$f(x) = a$	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$
$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, avec $n \geq 2$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$

Remarque : En prévision de deux nouvelles fonctions (exponentielle et logarithme népérien) que vous découvrirez en terminale, voici deux formules qui auront un sens l'an prochain :

Fonction	Une primitive
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$	$F(x) = \ln(x)$



En allemand...

La valeur moyenne d'une fonction : das Mittelwert einer Funktion