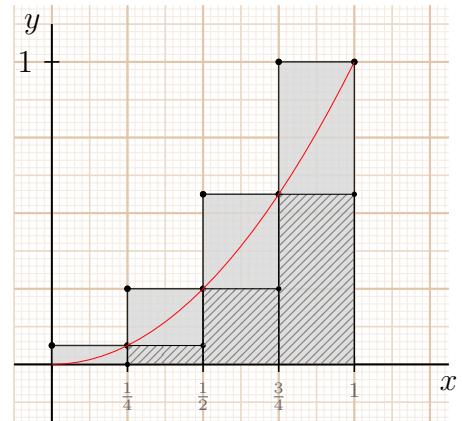


Méthode des rectangles pour le calcul de $\mathcal{A} = \int_0^1 x^2 dx$

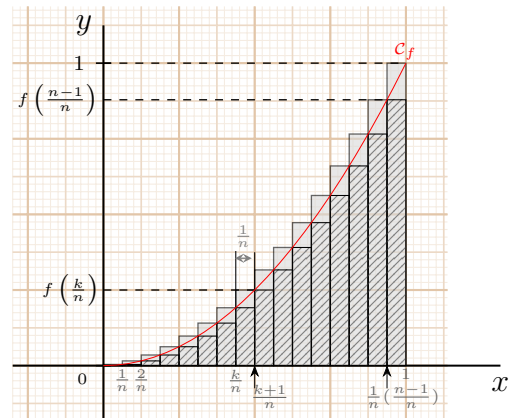
1. Commençons par partager l'intervalle $[0 ; 1]$ en quatre intervalles de même amplitude $\frac{1}{4}$

La somme des aires des rectangles hachurés est inférieure à $\mathcal{A}$ et la somme des aires des rectangles grisés est supérieure à $\mathcal{A}$.
En déduire que

$$\frac{7}{32} \leq \mathcal{A} \leq \frac{15}{32}$$



2. On va maintenant généraliser ce procédé. n étant un entier supérieur ou égal à 1, on divise l'intervalle $[0 ; 1]$ en n intervalle de même amplitude



- a) Montrer que

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n} \right)^2$$

- b) En déduire que

$$\frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2]$$

c) On admet que, pour tout entier naturel n , $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

En déduire que

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

En déduire que $\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$, puis que

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Que valent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$?

En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.