

Exercices de révisions

Lois de probabilités

Exercice 1

On dispose d'un paquet de cartes contenant un nombre identique de cartes de la catégorie « Sciences » et de la catégorie « Économie ». Une question liée à un de ces deux thèmes figure sur chaque carte. Les cartes sont mélangées et on en tire une au hasard dans le paquet. Ensuite, on essaye de répondre à la question posée. Un groupe de copains participe à ce jeu. Connaissant leurs points forts et leurs faiblesses, on estime qu'il a :

- 3 chances sur 4 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en sciences ;
- 1 chance sur 8 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en économie.

On note S l'évènement « La question est dans la catégorie Sciences » et B l'évènement « La réponse donnée par le groupe est bonne ».

Partie A :

1. Calculer $P(B \cap S)$.
2. Déterminer la probabilité que le groupe de copains réponde correctement à la question posée.
3. Les évènements S et B sont-ils indépendants ?

Partie B :

Pour participer à ce jeu, on doit payer 5 € de droit d'inscription. On recevra :

- 10 € si on est interrogé en sciences et que la réponse est correcte ;
- 30 € si on est interrogé en économie et que la réponse est correcte ;
- rien si la réponse donnée est fausse.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée, associe son gain. On appelle gain la différence en euros entre ce qui est reçu et les 5 € de droit d'inscription.

4. Déterminer la loi de probabilité de X .
5. Que retourne la fonction Jeu écrite ci-dessous en langage Python avec les listes : $L = [-5 ; 5 ; 25]$ et $G = [0,5625 ; 0,375 ; 0,0625]$?

```
def Jeu(L,G) :  
    n = len(L)  
    E = 0  
    for i in range(n) :  
        E = E + L[i]*G[i]  
    return(E)
```

Exercice 2

Un magasin de téléphonie mobile lance une offre sur ses smartphones de la marque Pomme vendus à 800 € : il propose une assurance complémentaire pour 50 € ainsi qu'une coque à 20 €.

Ce magasin a fait les constatations suivantes concernant les acheteurs de ce smartphone :

- 40 % des acheteurs ont souscrit à l'assurance complémentaire.
- Parmi les acheteurs qui ont souscrit à l'assurance complémentaire, 20% ont acheté en plus la coque.
- Parmi les acheteurs qui n'ont pas souscrit à l'assurance complémentaire, deux sur trois n'ont pas acheté la coque.

On interroge au hasard un client de ce magasin ayant acheté un smartphone de la marque Pomme. On considère les évènements suivants :

- A : « le client a souscrit à l'assurance complémentaire » ;
- C : « le client a acheté la coque ».

1. Calculer la probabilité que le client ait souscrit à l'assurance complémentaire et ait acheté la coque.

2. Montrer que $P(C) = 0,28$.

3. Le client interrogé a acheté la coque.

Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas souscrit à l'assurance complémentaire ?

4. Déterminer la dépense moyenne d'un client de ce magasin ayant acheté un smartphone de la marque Pomme.

On pourra noter X la variable aléatoire qui représente la dépense en euros d'un client de ce magasin ayant acheté un smartphone de la marque Pomme.

Exercice 3

Une étude statistique menée lors des entraînements montre que, pour un tir au but, Karim marque avec une probabilité de 0,7.

Karim effectue une série de 3 tirs au but. Les deux issues possibles après chaque tir sont les événements :

- M : « Karim marque un but » ;
- R : « Karim rate le tir au but ».

On admet que les tirs au but de Karim sont indépendants.

1. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre total de buts marqués à l'issue de cette série de tirs par Karim.
 - (a) Réaliser un arbre pondéré permettant de décrire toutes les issues possibles.
 - (b) Déterminer la loi de probabilité de X .
 - (c) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X .
2. On propose à un spectateur le jeu suivant : il mise 15 € avant la série de tirs au but de Karim ; chaque but marqué par Karim lui rapporte 6 €, et chaque but manqué par Karim ne lui rapporte rien.

On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique du spectateur, c'est-à-dire la différence entre le gain total obtenu et la mise engagée.

 - (a) Exprimer Y en fonction de X .
 - (b) Calculer l'espérance $E(Y)$ de la variable aléatoire Y . Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 4

Une chaîne de salons de coiffure propose à ses 5 000 clients qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires cumulables :

- une coloration naturelle à base de plantes appelée « couleur-soin »,
- des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées « effet coup de soleil ».

Il apparaît que 2 000 clients demandent une « couleur-soin ». Parmi ceux qui ne veulent pas de « couleur soin », 900 demandent un « effet coup de soleil ». Par ailleurs, 650 clients demandent une « couleur soin » et un « effet coup de soleil ».

On notera C l'événement « le client souhaite une "couleur-soin" ».

On notera E l'événement « le client souhaite un "effet coup de soleil" ».

1. Recopier sur votre copie et compléter le tableau suivant :

	C	$\overline{C}$	Total
E		900	
$\overline{E}$			
Total			5 000

2. On interroge un client au hasard parmi les 5 000 clients.
 - (a) Quelle est la probabilité qu'il ait choisi les deux prestations : « couleur soin » et « effet coup de soleil » ?
 - (b) Calculer $P_E(\overline{C})$.
3. On a des prix différents suivant la prestation fournie. On appelle X le prix payé en euros par chaque client.

	Coupe seule	Coupe avec « couleur soin »	Coupe avec « effet coup de soleil »	Coupe avec « couleur soin » et « effet coup de soleil »
Valeurs de k en €	20	50	65	80
$P(X = k)$			0,18	0,13

Après avoir recopié et complété le tableau, calculer l'espérance de X .

Exercice 5

Dans cet exercice toutes les probabilités seront données sous forme décimale, arrondie au millièème.

Une entreprise récupère des smartphones endommagés, les répare et les reconditionne afin de les revendre à prix réduit.

- 45 % des smartphones qu'elle récupère ont un écran cassé ;
- parmi les smartphones ayant un écran cassé, 30% ont également une batterie défectueuse ;
- par contre, seulement 20 % des smartphones ayant un écran non cassé ont une batterie défectueuse.

1. Un technicien chargé de réparer et reconditionner les smartphones de l'entreprise prend un smartphone au hasard dans le stock. On note :

- E l'évènement : « Le smartphone choisi a un écran cassé ».
- B l'évènement : « Le smartphone choisi a une batterie défectueuse ».

- Représenter la situation décrite ci-dessus par un arbre pondéré.
- Démontrer que la probabilité que le smartphone choisi ait une batterie défectueuse est égale à 0,245.
- Sachant que le smartphone choisi a une batterie défectueuse, quelle est la probabilité qu'il ait un écran cassé ?

2. L'entreprise dépense 20 € pour réparer et reconditionner chaque smartphone qu'elle récupère. Si l'écran est cassé, elle dépense 30 € supplémentaires, et si la batterie est défectueuse, elle dépense 40 € supplémentaires.

On note X la variable aléatoire égale au coût total de réparation et reconditionnement d'un smartphone choisi au hasard dans le stock.

- Recopier et compléter sur la copie (aucune justification n'est attendue) le tableau suivant pour donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

x_i	20	50	...	...
$P(X = x_i)$	0,44	...	...	...

- L'entreprise doit réparer et reconditionner 500 smartphones. Combien doit-elle s'attendre à dépenser ?

Exercice 6

Un parfumeur propose l'un de ses parfums, appelé « Fleur Rose », et cela uniquement avec deux contenances de flacons : un de 30 mL ou un de 50 mL. Pour l'achat d'un flacon « Fleur Rose », il propose une offre promotionnelle sur un autre parfum appelé « Bois d'ébène ».

On dispose des données suivantes :

- 58 % des clients achètent un flacon de parfum « Fleur Rose » de 30 mL et, parmi ceux là, 24% achètent également un flacon du parfum « Bois d'ébène » ;
- 42 % des clients achètent un flacon de parfum « Fleur Rose » de 50 mL et, parmi ceux là, 13 % achètent également un flacon du parfum « Bois d'ébène ».

On admet qu'un client donné n'achète qu'un seul flacon de parfum « Fleur de Rose » (soit en 30 mL soit en 50 mL), et que s'il achète un flacon du parfum « Bois d'ébène », il n'en achète aussi qu'un seul flacon.

On choisit au hasard un client achetant un flacon du parfum « Fleur Rose ». On considère les évènements suivants :

- F : « le client a acheté un flacon « Fleur Rose » de 30 mL » ;
- B : « le client a acheté un flacon "Bois d'ébène" ».

- Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'exercice.
- Calculer la probabilité $P(F \cap B)$.
- Calculer la probabilité que le client ait acheté un flacon « Bois d'ébène ».
- Un flacon « Fleur Rose » de 30 mL est vendu 40 €, un flacon « Fleur Rose » de 50 mL est vendu 60 € et un flacon « Bois d'ébène » 25 €.

On note X la variable aléatoire correspondant au montant total des achats par un client du parfum « Fleur Rose ».

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 7

Dans tout l'exercice, on notera $p(E)$ la probabilité d'un évènement E .

La répartition des 150 adhérents d'un club de sport est donnée dans le tableau ci-dessous :

Âge	15 ans	16 ans	17 ans	18 ans
Nombre de filles	17	39	22	10
Nombre de garçons	13	36	8	5
Total	30	75	30	15

On choisit un adhérent au hasard.

1. Quelle est la probabilité que l'adhérent choisi ait 17 ans ?
2. L'adhérent choisi a 18 ans. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

On note X la variable aléatoire donnant l'âge de l'adhérent choisi.

3. Déterminer la loi de probabilité de X .
4. Calculer $p(X \geq 16)$ et interpréter le résultat.
5. Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat.

Exercice 8

Dans un jeu, Jeanne doit trouver la bonne réponse à une question posée. Les questions sont classées en trois catégories : sport, cinéma et musique. Jeanne, fervente supportrice de ce jeu, est consciente qu'elle a :

- 1 chance sur 2 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en sport ;
- 3 chances sur 4 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en cinéma ;
- 1 chance sur 4 de donner la bonne réponse sachant qu'elle est interrogée en musique.

On note :

- S l'évènement : « Jeanne est interrogée en sport » ;
- C l'évènement : « Jeanne est interrogée en cinéma » ;
- M l'évènement : « Jeanne est interrogée en musique » ;
- B l'évènement : « Jeanne donne une bonne réponse ».

Rappel de notation : la probabilité d'un évènement A est notée $P(A)$.

Dans chaque catégorie, il y a le même nombre de questions. On admet donc que $P(S) = P(C) = P(M) = \frac{1}{3}$.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Jeanne tire au hasard une question. Montrer que $P(B) = \frac{1}{2}$.

Pour participer à ce jeu, Jeanne doit payer 10 € de droit d'inscription. Elle recevra :

- 10 € si elle est interrogée en sport et que sa réponse est bonne ;
- 20 € si elle est interrogée en cinéma et que sa réponse est bonne ;
- 50 € si elle est interrogée en musique et que sa réponse est bonne ;
- rien si la réponse qu'elle donne est fausse.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée par Jeanne associe son gain algébrique, c'est-à-dire la différence en euros entre ce qu'elle reçoit et les 10 € de droit d'inscription.

3. Montrer que $P(X = 40) = \frac{1}{12}$.
4. Déterminer la loi de probabilité de X .
5. Calculer l'espérance mathématique de X . Jeanne a-t-elle intérêt à jouer ?

Exercice 9

Un parent d'élèves propose un jeu pour la fête de l'école. Une urne opaque contient 100 billes indiscernables au toucher : 10 billes rouges, 30 billes blanches et 60 billes vertes.

Pour une partie, chaque joueur doit miser 2 jetons. Ensuite, le joueur prélève une bille au hasard dans l'urne.

- Si la bille prélevée est rouge, le joueur récupère 8 jetons.
- Si la bille est blanche, le joueur récupère 4 jetons.
- Si la bille est verte, le joueur ne gagne rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en nombre de jetons, c'est-à-dire, le nombre de jetons gagnés diminué de la mise.

1. (a) Établir que la loi de probabilité de X est donnée par :

Valeurs a prises par X	-2	2	6
$p(X = a)$	0,6	0,3	0,1

- (b) Démontrer que le jeu est équitable, c'est-à-dire que l'espérance de X est nulle.
 - (c) Calculer la variance puis l'écart-type de X . On arrondira au centième.
2. Pour financer les différentes actions de l'école, les organisateurs de la fête veulent modifier le jeu pour qu'il leur devienne favorable. Ils décident alors d'ajouter des billes vertes dans l'urne.
Combien de billes vertes doit-on ajouter dans l'urne pour que l'espérance du jeu soit égale à -1 ?

Exercice 10

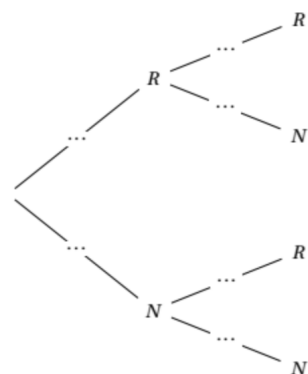
Une urne contient deux boules rouges et trois boules noires toutes indiscernables au toucher.

On tire au hasard une première boule en notant sa couleur puis on la remet dans l'urne.

On tire ensuite toujours au hasard une deuxième boule en notant sa couleur.

On note R l'évènement « tirer une boule rouge » et N l'évènement « tirer une boule noire ».

1. Recopier et compléter sur la copie l'arbre pondéré ci-dessous associé à cette expérience.



2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?
3. Si un joueur tire une boule rouge, il gagne 20 euros. S'il tire une boule noire, il perd 10 euros.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur, en euros, à l'issue des deux tirages successifs.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

4. Calculer la probabilité que le joueur gagne de l'argent.
5. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et en donner une interprétation.

Exercice 11

Une fleuriste met en vente quatre sortes de bouquets dont les tarifs et la composition sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

Bouquet de tulipes orange : 10,50 €	Bouquet de roses orange : 23,50 €
Bouquet de tulipes blanches : 11,60 €	Bouquet de roses blanches : 25,50 €

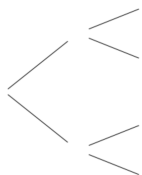
- 72 % des bouquets mis en vente ne contiennent que des roses.
- Les autres bouquets mis en vente ne contiennent que des tulipes.
- 20 % des bouquets de tulipe mis en vente ne contiennent que des tulipes orange.
- 36 % des bouquets mis en vente ne contiennent que des roses blanches.

Un client achète au hasard un bouquet parmi ceux mis en vente par la fleuriste. On note :

- R l'évènement : « Le bouquet acheté par ce client est composé de roses. »
- B l'évènement : « Le bouquet acheté par ce client est composé de fleurs blanches. »

Les évènements contraires des évènements R et B sont notés respectivement $\bar{R}$ et $\bar{B}$.

- (a) Donner, sans justifier, la probabilité $p(R \cap B)$.
- (b) Recopier et compléter le plus possible l'arbre de probabilité ci-dessous en traduisant uniquement les données de l'énoncé.



- Montrer que $p(B) = 0,584$.
- On note X la variable aléatoire qui donne le prix d'un bouquet acheté par un client.
 - Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant, pour chaque valeur x_i de X , la probabilité de l'évènement $\{X = x_i\}$. Justifier.

x_i				
$p(X = x_i)$				

- Calculer l'espérance de la variable aléatoire X . On arrondira le résultat au centième.

Exercice 12

Claire joue régulièrement à un jeu de simulation de tournois de judo en ligne. Les adversaires qu'elle combat sont générés automatiquement de manière aléatoire selon le niveau atteint dans le jeu.

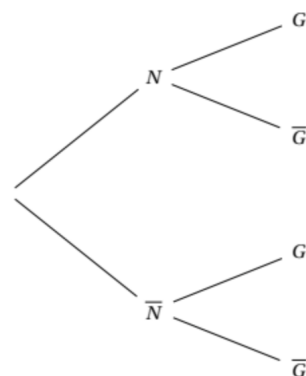
Elle a atteint le niveau le plus élevé, celui de la ceinture noire. Les scores relevés par le jeu montrent qu'elle gagne dans 45 % des cas si son adversaire est ceinture noire et dans 70 % si son adversaire n'est pas ceinture noire.

Claire commence un tournoi et un premier adversaire est généré par le jeu. À ce niveau la probabilité d'affronter un adversaire ayant une ceinture noire est 0,6.

On note :

- N l'évènement : « l'adversaire est ceinture noire » ;
- G l'évènement : « Claire gagne le combat ».

- Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant cette situation.



- Calculer la probabilité que l'adversaire soit ceinture noire et que Claire gagne son tournoi.
- Montrer que la probabilité que Claire gagne son combat est 0,55.
- Claire vient de perdre un combat. Quelle est la probabilité que le combat ait été contre une ceinture noire ?
- On considère dans cette question que la probabilité que Claire gagne est 0,55. Elle fait deux combats successifs.

On note X la variable qui compte le nombre de victoires. Donner la loi de probabilité de X .

Exercice 13

Une petite entreprise de textile commercialise des nappes et des lots de serviettes assorties. Un client achète au plus une nappe et au plus un lot de serviettes.

En consultant le fichier des ventes de l'entreprise, on constate que :

- 20 % des clients achètent une nappe ;
- Parmi les clients ayant acheté une nappe, 70 % ont acheté un lot de serviettes ;
- Parmi les clients n'ayant pas acheté de nappe, 10 % ont tout de même acheté un lot de serviettes.

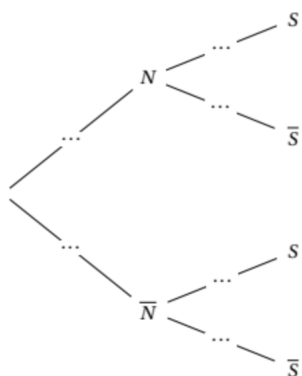
On choisit au hasard un client de cette entreprise.

Pour tout évènement A , on note $\bar{A}$ l'évènement contraire de A et $P(A)$ la probabilité de l'évènement A .

On note les évènements suivants :

- N « le client achète une nappe » ;
- S « le client achète un lot de serviettes »

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-dessous décrivant la situation :



2. Calculer la probabilité que le client achète une nappe et un lot de serviettes.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement S est égale à 0,22.
4. Calculer la probabilité que le client achète une nappe sachant qu'il a acheté une serviette.
5. Une nappe est vendue 45 € et un lot de serviettes 25 €.

On appelle D la variable aléatoire donnant la dépense effectuée par un client.

Calculer l'espérance mathématique de D et donner une interprétation de ce nombre dans le contexte de l'exercice.