

Probabilités

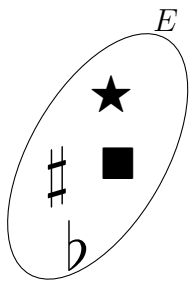
1. Ensembles finis

A. Définitions

■ DÉFINITION :

- Soit E un ensemble.
 E est un **ensemble fini** si et seulement si E est vide ou si E est constitué d'un nombre fini d'éléments.
- Soit E un ensemble fini non vide. On appelle **cardinal de E** et on note $\text{card}(E)$ le nombre d'éléments de E .

Exemple :



$$\text{card}(E) = 4$$

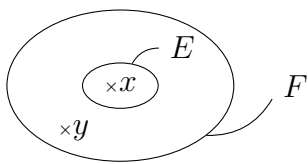
On complète la définition en posant : $\text{card}(\emptyset) = 0$.

■ PROPRIÉTÉ :

Soient E et F deux ensembles finis.

Si E est inclus dans F , alors $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$

Exemple :



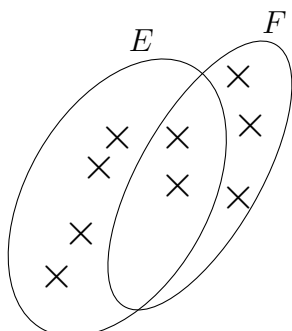
- $\forall x \in E, x \in F$
- $\exists y \in F, y \notin E$

■ PROPRIÉTÉ :

Soient E et F deux ensembles finis.

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$$

Exemple :



$$\text{card}(E) = 6$$

$$\text{card}(F) = 5$$

$$\text{card}(E \cap F) = 2$$

$$\text{card}(E \cup F) = 9$$

B. Vocabulaire des probabilités

Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire statistique	Vocabulaire probabiliste
Ensemble E	Population	Univers Ω .
Élément x avec $x \in E$	Individu	Éventualité ou cas possible.
Sous-ensemble A avec $A \subset E$	Échantillon	Événement $A \subset \Omega$.
Partie vide	$\times$	Événement impossible
Partie pleine	$\times$	Événement certain
Singleton	$\times$	Événement élémentaire

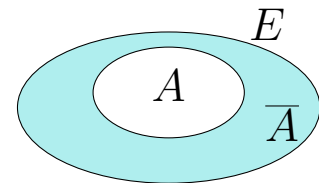
Remarque : Un univers est composé d'éventualités.

Soit Ω un univers.

Soient A et B deux ensembles inclus dans E .

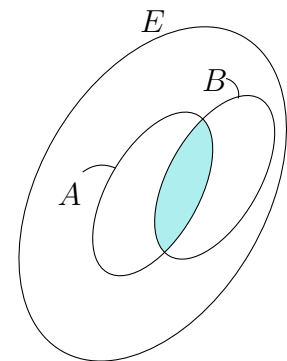
1. $\bar{A}$ est le **complémentaire** de A .

$$x \in \bar{A} \iff x \notin A$$



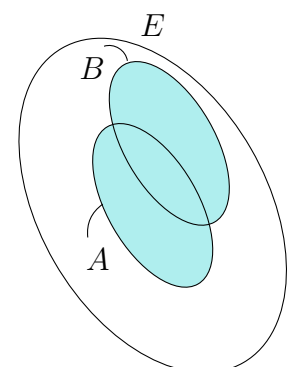
2. $A \cap B$ est l'**intersection** de A et de B .

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$



3. $A \cup B$ est la **réunion** de A et de B .

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$



C. Lois de Morgan

Exemple :

On jette un dé non pipé.

Univers $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Événement A : « Le résultat est pair »

$A = \{2 ; 4 ; 6\}$.

Événement B : « Le résultat est supérieur ou égal à 3 »

$B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

On a :

$$\bar{A} = \{1 ; 3 ; 5\}$$

$$\bar{B} = \{1 ; 2\}$$

$$A \cap B = \{4 ; 6\}$$

$$A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$

$$\overline{A \cap B} = \{1 ; 2 ; 3 ; 5\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{1\}$$

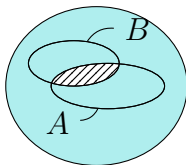
$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{1 ; 2 ; 3 ; 5\}$$

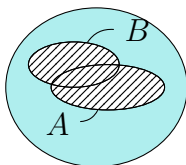
On constate que :

$$\bullet \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

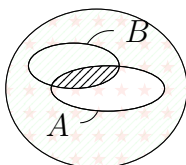
$$\bullet \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$$



$$A \cap B$$



$$A \cup B$$



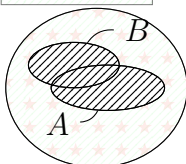
$$\bar{A} \cup \bar{B}$$



$$\bar{A}$$



$$\bar{B}$$



$$\bar{A} \cap \bar{B}$$

■ PROPRIÉTÉ : Loi de Morgan

Pour tous événements A et B de l'univers Ω ,

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

2. Définitions et exemples

A. Événements

■ DÉFINITION :

On considère une expérience aléatoire et Ω son univers associé. On appelle **événement** toute partie de Ω .

Exemple :

Quand on lance un dé à 6 faces, $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$. On considère la partie $A = \{2 ; 4 ; 6\}$. A est une partie de Ω , donc A est un événement. Cet événement peut aussi s'écrire en français : $A =$ « tirer un nombre pair ».

Décrire comme partie de Ω les événements

$B =$ « tirer un nombre premier »

et $C =$ « tirer un nombre supérieur ou égal à 2 ».

$$B = \{2 ; 3 ; 5\}$$

$$C = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$

Exemple :

On pioche une carte dans un jeu de 32 cartes.

Décrire par une phrase l'événement

$$D = \left\{ \begin{array}{c} \text{A} \\ \spadesuit \end{array} ; \begin{array}{c} \text{A} \\ \heartsuit \end{array} ; \begin{array}{c} \text{A} \\ \clubsuit \end{array} ; \begin{array}{c} \text{A} \\ \diamondsuit \end{array} \right\}$$

$B =$ « Obtenir un As »

■ DÉFINITION :

Un événement est **impossible** s'il ne se réalise jamais.

■ DÉFINITION :

Un événement est **certain** s'il se réalise toujours, quel que soit le résultat de l'expérience aléatoire.

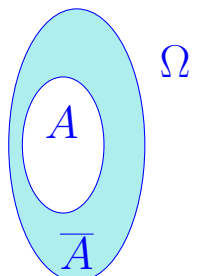
Exemple :

On jette un dé à 6 faces.

- Événement impossible : « Obtenir 10 »
- Événement certain : « Obtenir un nombre compris entre 1 et 6 »

■ DÉFINITION :

On note $\bar{A}$ l'**événement contraire** de A , c'est-à-dire l'événement qui se réalise quand A ne se réalise pas. $\bar{A}$ est l'événement formé des éventualités qui ne sont pas dans A .



Exemple :

On jette un dé à 6 faces. On considère l'événement $A = \{2 ; 4 ; 6\}$. Alors

$$\bar{A} = \{1 ; 3 ; 5\}$$

Et on a bien $\bar{A} = \text{« Tirer un nombre impair »}$

Exemple :

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
Quel est l'événement contraire de l'événement :

$$R = \left\{ \begin{array}{c} \text{2 de trèfle} ; \text{2 de cœur} ; \text{3 de trèfle} ; \text{3 de cœur} ; \dots ; \text{A de trèfle} ; \text{A de cœur} \end{array} \right\}$$

$$\bar{R} = \{ \text{cartes noires} \}.$$

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire suivante : « On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes, on la note sur un morceau de papier, on remet la carte dans le paquet, on tire une seconde fois une carte au hasard et on note cette carte à droite de la précédente note. ». Quel est l'événement contraire de l'événement $N = \text{« tirer deux cartes noires »}$.

$$\bar{N} = \text{« tirer au moins une carte noire »}$$

■ DÉFINITION :

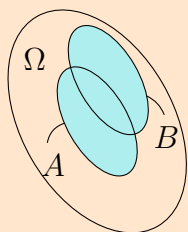
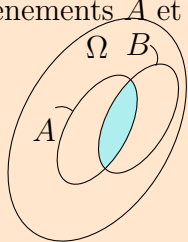
On considère une expérience aléatoire et on note Ω son univers. On considère deux événements A et B .

L'événement « $A \cap B$ » est constitué des issues qui sont dans A et dans B :

$$\text{« } A \text{ et } B \text{ »} = A \cap B$$

L'événement « $A \cup B$ » est constitué des issues qui sont dans A ou dans B :

$$\text{« } A \text{ ou } B \text{ »} = A \cup B$$



Remarque : $A \cap B$ est contenu dans $A \cup B$. En mathématiques, le **ou** est **inclusif**, contrairement à son usage en langage courant, où il signifie **ou bien**. Ainsi, le **ou** du langage mathématique est parfois appelé **et/ou** en langage courant.

B. Notion de probabilités

Origine : Loi des grands nombres. Si une expérience aléatoire est répétée un grand nombre de fois, la fréquence d'apparition de chaque événement élémentaire **s'approche** d'un nombre particulier p . Ce nombre est appelé la **probabilité de l'éventualité** e , et on note $P(e) = p$.

■ DÉFINITION :

La **probabilité** d'une issue est la « proportion de chance » théorique d'obtenir cette issue lors d'une expérience aléatoire.

Exemple :

- Si on lance une pièce parfaitement équilibrée,

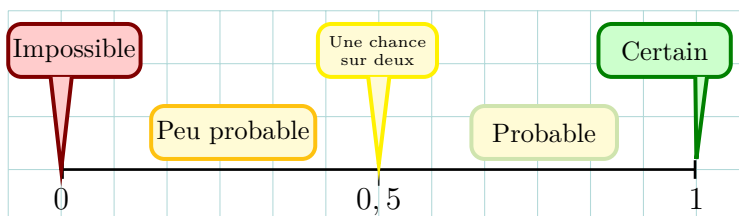
$$P(\text{Obtenir Pile}) = P(\text{Obtenir Face}) = \frac{1}{2}$$

- Si on lance un dé parfaitement équilibré,

$$P(\text{Obtenir } 1) = \dots = P(\text{Obtenir } 6) = \frac{1}{6}$$

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1 et on a les interprétations suivantes :



■ DÉFINITION :

Soit N un nombre entier supérieur ou égal à 1. On considère une expérience aléatoire et son univers associé : $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_N\}$.

Si $P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_N)$, alors on dit qu'il y a **équiprobabilité** sur Ω .

Remarque : Dans une expérience aléatoire, on dit que les issues sont **équiprobables** si elles ont la même probabilité, c'est-à-dire la même chance de survenir.

Exemple :

Dans le cas d'un lancer d'une pièce parfaitement équilibrée ou d'un dé parfaitement équilibré, il y a équiprobabilité sur Ω .

Si on lance un dé truqué, il n'y a pas équiprobabilité.

3. Calcul des probabilités

A. Cas général

■ PROPRIÉTÉ :

Soit N un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout univers $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_N\}$ et toute probabilité P sur Ω , on a

$$P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_N) = 1$$

Exemple :

On considère le lancer d'un dé à six faces parfaitement équilibré. Il y a 6 issues, qui sont les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Chaque issue a une chance sur six d'être réalisée, c'est-à-dire $\frac{1}{6}$.

On a bien

$$\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 1}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 2}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 3}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 4}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 5}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 6}} = 1$$

■ DÉFINITION :

On considère une expérience aléatoire, Ω son univers associé et P une probabilité sur Ω . Soit A un événement. La **probabilité de l'événement** A , notée $P(A)$, est la somme des probabilités des éventualités qui le composent.

Exemple :

On lance un dé parfaitement équilibré. Puisque le dé est parfaitement équilibré, il y a équiprobabilité sur Ω .

Soit A l'événement : « Obtenir un multiple de 3 ».

$A = \{3 ; 6\}$. Alors

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 3}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 6}}$$

$$P(A) = \frac{2}{6}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Quelle que soit l'expérience aléatoire, $P(\Omega) = 1$.

■ PROPRIÉTÉ : (rappel)

Soient Ω un univers, P une probabilité sur Ω et A un événement. Alors $0 \leq P(A) \leq 1$.

Remarque : Cette propriété est très pratique pour vérifier ses résultats après un calcul de probabilité !

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Soit A un événement. Alors

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Exemple :

On reprend le lancer d'un dé à six faces. On considère l'événement : « Ne pas obtenir un 6 ». Notons-le $\overline{A}$. Alors l'événement A est « Obtenir un 6 », et on a vu que $P(A) = \frac{1}{6}$. Donc

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

B. Cas particulier de l'équiprobabilité

S'il y a équiprobabilité, on dispose de deux propriétés supplémentaires :

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Dans une expérience aléatoire à n issues **équiprobables**, alors la probabilité de chacune des issues est $\frac{1}{n}$.

Exemple :

Dans un lancer de dé non truqué à six faces, chaque issue a la même probabilité d'apparaître (puisque le dé est non truqué).

Donc la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{6}$, on retrouve le résultat précédent.

■ PROPRIÉTÉ : (admise) Formule de Laplace¹

Dans une expérience aléatoire où toutes les issues sont **équiprobables**, la probabilité d'un événement A vaut

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Exemple :

On considère une urne avec, à l'intérieur, vingt boules indiscernables au toucher. Ces boules sont numérotées de 1 à 20. Déterminer la probabilité de l'événement A : « Tirer un multiple de 5 ».

Les boules sont indiscernables au toucher, donc nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

Il y a 4 multiples de 5 entre 1 et 20, donc

$$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20 \, \%.$$



En allemand...

- Gleichwahrscheinlichkeit : équiprobabilité

1. Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) est un mathématicien, physicien et homme politique français.

4. Variable aléatoire, loi de probabilité et espérance mathématique

Exemple :

On extrait au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes, on la note sur un papier, on la remet dans le jeu et on retire une carte, que l'on note à droite de la précédente.

- Calculer $\text{card}(\Omega) = 32 \times 32 = 1024$
- Pour chaque issue, on appelle X le nombre de figures (Valet, Dame, Roi) du tirage. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?
 $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$
- L'ensemble de toutes les issues pour lesquelles X prend la valeur 0, c'est-à-dire l'ensemble des tirages sans figure, peut se noter : $(X = 0)$: c'est un événement, car c'est une partie de Ω . Autrement dit, $(X = 0) = \{\text{Tirages sans figures}\}$ et

$\text{card}(X = 0) = 20 \times 20$ car il y a $4 \times (8 - 3) = 20$ cartes non figure dans le jeu

Que vaut alors : $P(X = 0)$?

$$P(X = 0) = \frac{\text{card}(X = 0)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{400}{1024} = \frac{25}{64}$$

- De même l'ensemble de toutes les issues pour lesquelles X prend la valeur 1, c'est-à-dire l'ensemble des tirages comportant une unique figure, peut se noter : $(X = 1)$.

Vérifier que $P(X = 1) = \frac{30}{64}$.

Il y a $4 \times (3 \times 20 + 20 \times 3) = 4 \times 120 = 480$ couples de cartes avec exactement une figure. Donc

$$P(X = 1) = \frac{\text{card}(X = 1)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{480}{1024} = \frac{120}{256} = \frac{30}{64}$$

Compléter le tableau suivant :

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{25}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{9}{64}$

Calculer $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$. On obtient $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$

Ce résultat était-il prévisible ? La somme des probabilités vaut 1 quand on parcourt l'ensemble des cas possibles.

■ DÉFINITION :

On suppose défini un univers des possibles Ω et une probabilité P sur Ω . Une variable aléatoire X associe à chaque issue de Ω un nombre réel : c'est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

Si la variable aléatoire X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_N$, le tableau suivant résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X

x	x_1	x_2	$\dots$	x_N
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\dots$	p_N

■ PROPRIÉTÉ :

Avec les notations précédentes :

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_N) = 1$$

Démonstration.

$\Omega = (X = x_1) \cup (X = x_2) \dots \cup (X = x_N)$ est une réunion d'événements incompatibles. $P(\Omega) = 1$ et

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(X = x_1) \cup (X = x_2) \cup \dots \cup (X = x_N) \\ &= P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_N) \end{aligned}$$

■ DÉFINITION :

Soit une X variable aléatoire de loi de probabilité :

x	x_1	x_2	$\dots$	x_N
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\dots$	p_N

L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre noté $E(X)$ et défini par

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_N x_N$$

Remarque : L'espérance de X est la **moyenne** des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités.

■ DÉFINITION :

Soit une X variable aléatoire de loi de probabilité :

x	x_1	x_2	$\dots$	x_N
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\dots$	p_N

La **variance** de la variable aléatoire X est le nombre noté $V(X)$ et défini par

$$\begin{aligned} V(X) &= p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 \\ &\quad + \dots + p_N (x_N - E(X))^2 \\ V(X) &= \sum_{k=1}^N P(X = x_k) \times (x_k - E(X))^2 \end{aligned}$$

L'écart-type de la variable aléatoire X est le nombre positif ou nul $\sigma(X)$ et défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

■ PROPRIÉTÉ : (Formule de Huygens-König)

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

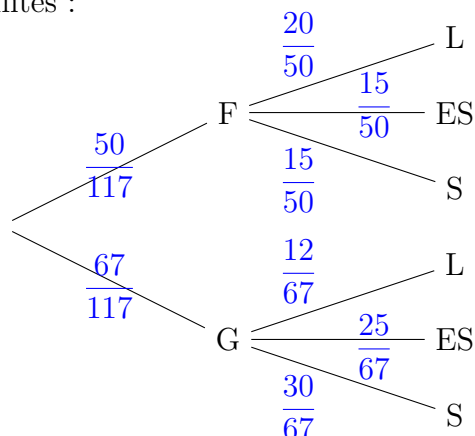
5. Probabilités conditionnelles

Exemple :

On considère la répartition suivante :

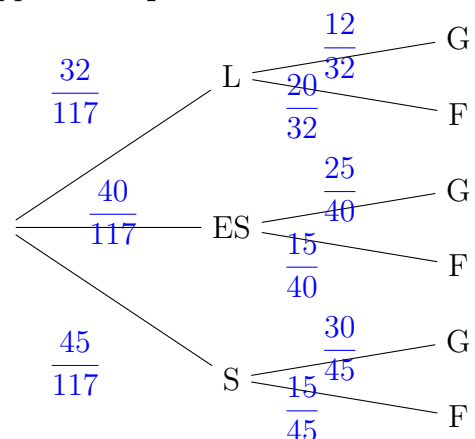
Classes de Première	L	ES	S	Total
Filles	20	15	15	50
Garçons	12	25	30	67
Total	32	40	45	117

On peut associer à ce tableau deux arbres de probabilités :



Alors :

- $P(G) = \frac{67}{117}$ • $P(F) = \frac{50}{117}$
- On a aussi que la probabilité d'être en L sachant que l'on est un garçon est $\frac{12}{67}$; ceci s'appelle une **probabilité conditionnelle**.



Alors :

- $P(L) = \frac{32}{117}$ • $P(ES) = \frac{40}{117}$
- On a aussi que la probabilité d'être un garçon sachant que l'on est en L est $\frac{12}{32}$,
noté $P_L(G) = \frac{12}{32}$.

Remarque : On constate donc que

$$P_L(G) \neq P(G)$$

c'est-à-dire que l'événement L « influence » l'événement G .

Il faut voir $P_L(G)$ comme la probabilité de G en remplaçant $\Omega = \{\text{Tous les élèves}\}$ par $L = \{\text{Tous les élèves en } L\}$ c'est-à-dire

$$P(G) P_\Omega(G) = \frac{67}{117} \text{ et } P_L(G) = \frac{12}{32}$$

Remarque : Remarquons aussi que

$$\begin{aligned} P_L(G) &= \frac{\text{card}(G \cap L)}{\text{card}(L)} \\ &= \frac{\text{card}(G \cap L) / \text{card}(\Omega)}{\text{card}(L) / \text{card}(\Omega)} \\ &= \frac{P(G \cap L)}{P(L)} \end{aligned}$$

d'où la définition suivante :

■ DÉFINITION :

Soit un univers Ω et une probabilité P sur Ω . On considère un événement A de probabilité non nulle. Pour tout événement B , la **probabilité de l'événement B sachant l'événement A** , noté $P_A(B)$ (ou $P(B|A)$) est définie par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque : On a donc

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Remarque : $P_A(B)$ est lu « P de B sachant A ».

Exemple :

Soit un jeu de 52 cartes.

On tire successivement deux cartes sans remise.

Soit l'événement A : « On tire deux piques ».

Soit l'événement B : « La première carte tirée est un pique ».

Soit l'événement C : « La seconde carte tirée est un pique ».

Calculons $P(A)$. On a $A = B \cap C$.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B \cap C) \\ &= P(B) \times P_B(C) \\ &= \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \\ &= \frac{1}{17} \end{aligned}$$



En allemand...

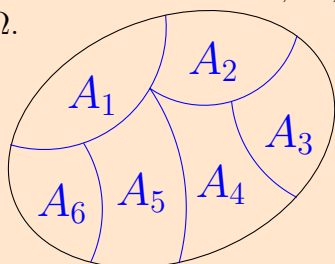
- Bedingte Wahrscheinlichkeit : probabilités conditionnelles

■ DÉFINITION :

Soit Ω un espace probabilité fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ n événements de Ω .

On dit que $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ forme un **système complet d'événements** de Ω , ou une **partition** de Ω si et seulement si :

1. Aucun des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ n'est vide.
2. L'intersection de deux événements quelconques des événements $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ est vide.
3. La réunion des événements $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ est égale à Ω .



Remarque : A et $\bar{A}$ forment un système complet d'événements.

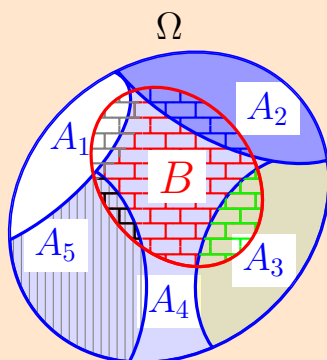
■ **THÉORÈME :** (Formule des probabilités totales)

Soit Ω un espace probabilité fini.

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ un système complet d'événements de Ω .

Soit B un événement quelconque de Ω .

On a $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \dots \cup (A_n \cap B)$,
où $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B$ sont incompatibles.



On en déduit que

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)]$$

Or, les événements sont incompatibles, donc

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Exemple :

Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines identiques M_1, M_2 et M_3 plus ou moins récentes. La fabrication se répartit sur trois machines, chaque machine produisant une pièce finie. Une pièce fabriquée comporte parfois un défaut, selon le degré de vétusté de la machine qui l'a produite. La répartition de la fabrication sur les trois machines et la fréquence des défauts sont données par le tableau suivant :

Machine	M_1	M_2	M_3
Proportion de pièces fabriquées	50%	35%	15%
Fréquence des défauts	1%	2%	6 %

On prélève au hasard une pièce dans la production. On appelle D l'événement « La pièce prélevée présente un défaut » et M_i l'événement « La pièce a été fabriquée par la machine M_i » pour $i = 1, 2, 3$.

- Calculer $P(D)$.

On a $D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)$.
 M_1, M_2 et M_3 forment un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(D) &= P[(D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)] \\ &= P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3) \\ &= P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D) + P(M_3 \cap D) \\ &= P(M_1) \times P_{M_1}(D) + P(M_2) \times P_{M_2}(D) + P(M_3) \times P_{M_3}(D) \\ &= \frac{50}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{35}{100} \times \frac{2}{100} + \frac{15}{100} \times \frac{6}{100} \\ &= \frac{2,1}{100} \end{aligned}$$

- La pièce tirée présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine M_1 ? On cherche $P_D(M_1)$.

$$\begin{aligned} P_D(M_1) &= \frac{P(D \cap M_1)}{P(D)} \\ &= \frac{P(M_1) \times P_{M_1}(D)}{P(D)} \\ &= \frac{\frac{50}{100} \times \frac{1}{100}}{\frac{2,1}{100}} = \frac{5}{21} \end{aligned}$$



En allemand...

- Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

6. Événements indépendants

Exemple :

Dans une entreprise employant 250 salariés, dont 200 ouvriers et 50 cadres, on a réalisé une enquête pour recenser les volontaires pour travailler de nuit.

	Volontaires	Non volontaires	Totaux
Ouvriers	80	120	200
Cadres	20	30	50
Total	100	150	250

Pour chaque salarié, les résultats (cadre ou pas cadre, volontaire ou pas volontaire) sont indiqués sur une fiche. L'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard la fiche d'un salarié. On appelle V l'événement : « la fiche est celle d'un volontaire » et C l'événement « la fiche est celle d'un cadre ». Que vaut cette fois $P(V)$?

Cette fois, on a $P(V) = \frac{100}{250}$.

Donc $P(V) = \frac{2}{5}$.

Que vaut cette fois $P_C(V)$?

Cette fois, $P_C(V) = \frac{20}{50}$, donc $P_C(V) = \frac{2}{5}$.

Comment interpréter ce résultat ?

Cela signifie que la l'événement C n'a pas d'influence sur l'événement V . La probabilité que l'événement V ait lieu est la même que celle que l'événement V ait lieu **sachant que** l'événement C a eu lieu.

Remarque : On a les équivalences suivantes :

$$P_C(V) = P(V) \iff \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = P(V)$$

$$\iff P(C \cap V) = P(C) \times P(V)$$

■ DÉFINITION :

Soit Ω un univers.

Soit P une probabilité définie sur Ω .

Soient A et B deux événements sur Ω .

A et B sont indépendants

si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$



Attention

Ne pas confondre indépendants et incompatibles.

Remarque : D'une manière générale,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P_B(A) \times P(B)$$

et $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

Exemple :

On reprendre l'exemple des pièces métalliques. Les événements D et M_1 sont-ils indépendants ?

On a :

• $P(D) = \frac{2,1}{100}$ d'après l'exemple de la page précédente.

• $P(M_1) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ • $P(D \cap M_1) = \frac{1}{100}$

Alors $P(D) \times P(M_1) = \frac{2,1}{100} \times \frac{1,05}{100}$.

Donc $P(D) \times P(M_1) \neq P(D \cap M_1)$.

Ainsi les événements D et M_1 ne sont pas indépendants.

Exemple :

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. Soient les événements T = « la carte tirée est un trèfle » et A = « la carte tirée est un As ». Les événements A et T sont-ils indépendants ?

On a

• $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ • $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

• $P(A \cap T) = \frac{1}{32}$

Alors $P(A) \times P(T) = \frac{1}{32}$.

Donc $P(A) \times P(T) = P(A \cap T)$.

Ainsi les événements A et T sont indépendants.



En allemand...

• (stochastisch) unabhängige Ereignisse : événements indépendants

7. Épreuves répétées : loi binomiale

On considère une expérience n'admettant que deux résultats possibles, appelés « succès » ou « échec » et notés respectivement S et $\bar{S}$. On répète l'épreuve dans des conditions **identiques**, les résultats successifs étant **indépendants** les uns des autres.

Exemple :

On jette un dé non truqué.

Soit un événement S : « On obtient un 6. »

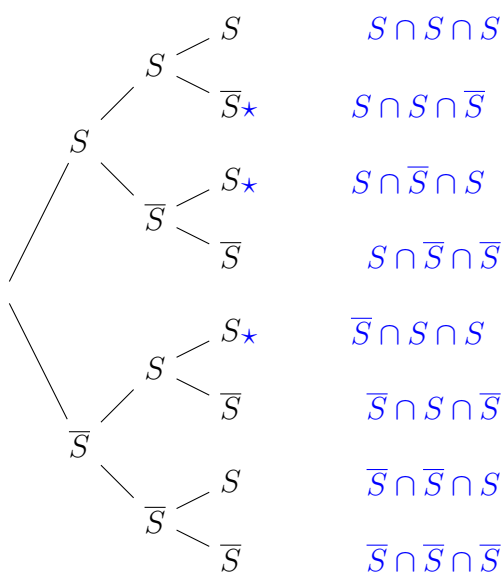
$$p(S) = \frac{1}{6}.$$

On jette le dé trois fois de suite.

On note A l'événement « Obtenir trois succès de suite. » Calculer $P(A)$.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(S \cap S \cap S) \\ &= p \times p \times p \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\ &= \frac{1}{216} \end{aligned}$$

Soit un événement B : « On obtient exactement deux fois 6 au cours des trois jets. » Quelle est la probabilité de B ?



$$B = (S \cap S \cap \bar{S}) \cup (S \cap \bar{S} \cap S) \cup (\bar{S} \cap S \cap S)$$

Ces trois événements sont **incompatibles deux à deux**.

$$P(B) = P[(S \cap S \cap \bar{S}) \cup (S \cap \bar{S} \cap S) \cup (\bar{S} \cap S \cap S)]$$

$$P(B) = P(S \cap S \cap \bar{S}) + P(S \cap \bar{S} \cap S) + P(\bar{S} \cap S \cap S)$$

$$P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$$

$$P(B) = 3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$$

$$P(B) = \frac{5}{72}$$

Combien de chemins (donc de branches à droite de l'arbre) comportent deux succès et un échec ? Il y a 3 chemins qui permettent de réaliser deux succès et un échec.

On introduit la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès pendant ces trois lancers.

$$\text{Montrer que } P(X=1) = \frac{25}{72}.$$

$$P(X=1) = P[(S \cap \bar{S} \cap \bar{S}) \cup (\bar{S} \cap S \cap \bar{S}) \cup (\bar{S} \cap \bar{S} \cap S)]$$

$$P(X=1) = P(S \cap \bar{S} \cap \bar{S}) + P(\bar{S} \cap S \cap \bar{S}) + P(\bar{S} \cap \bar{S} \cap S)$$

$$P(X=1) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$P(X=1) = 3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$$

$$P(X=1) = \frac{25}{72}$$

Déterminer la loi de probabilité de X :

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

$$P(X=0) = (1-p)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

Quelle est l'espérance de la variable aléatoire X ?

Son écart-type ?

$$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3)$$

$$= 0 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{25}{72} + 2 \times \frac{5}{72} + 3 \times \frac{1}{216}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X=0) + 1^2 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2) + 3^2 \times P(X=3)$$

$$= 0 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{25}{72} + 4 \times \frac{5}{72} + 9 \times \frac{1}{216}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Et d'après le lemme de König-Huygens,

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{12}}$$

■ DÉFINITION :

Une expérience aléatoire comportant deux issues (succès S ou échec $\bar{S}$) s'appelle une **épreuve de Bernoulli**.

■ DÉFINITION :

La répétition d'une même épreuve de Bernoulli, avec **indépendance** des tirages, s'appelle un **schéma de Bernoulli**.

■ DÉFINITION :

Dans un schéma de Bernoulli, si l'on appelle p la probabilité d'un succès (donc $P(S) = p$), si l'on appelle n le nombre d'essais et si X est la variable aléatoire comptant le nombre de succès, on dit que la variable X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** , notée : $\mathcal{B}(n; p)$ et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$

Exemple :

Dans l'exemple précédent, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$ noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3; \frac{1}{6}\right)$

■ PROPRIÉTÉ :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Pour tout k entier de l'intervalle $[0; n]$, la probabilité $P(X = k)$ d'obtenir k succès est donnée par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ le nombre de manières d'obtenir k succès dans n épreuves.

Exemple :

$\binom{4}{3} = 4$. Il y a 4 façons d'obtenir **trois** succès quand l'épreuve est répétée **quatre** fois :

$SSS\bar{S}$
 $SS\bar{S}S$
 $S\bar{S}SS$
 $\bar{S}SSS$

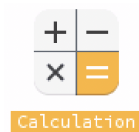
$\binom{4}{2} = 6$. Il y a 6 façons d'obtenir **deux** succès quand l'épreuve est répétée **quatre** fois :

$SS\bar{S}\bar{S}$
 $S\bar{S}S\bar{S}$
 $\bar{S}SS\bar{S}$
 $S\bar{S}\bar{S}S$
 $\bar{S}S\bar{S}S$
 $\bar{S}\bar{S}SS$

Calculer des coefficients binomiaux

La calculatrice effectue ce calcul :

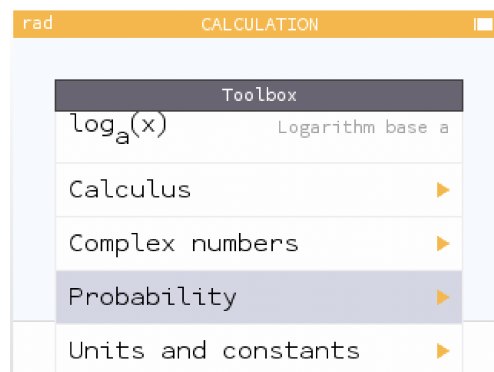
- Aller dans le mode « Calculation » de la calculatrice.



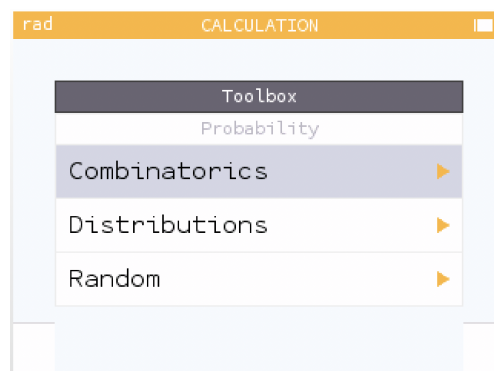
- Cliquer sur la touche boîte à outils de la calculatrice



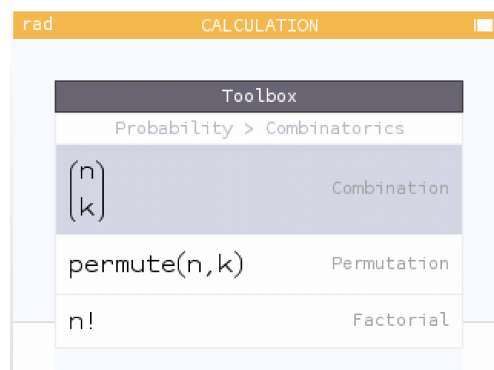
- Sélectionner « Probability »



- Sélectionner « Combinatorics »



- Enfin, sélectionner « Combination »



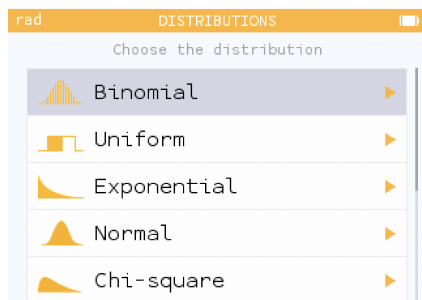
Calculer des probabilités avec une loi binomiale

On se place dans un exemple où le but est de calculer $P(X \leq 27)$ et $P(X = 25)$, où X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(50; 0,45)$.

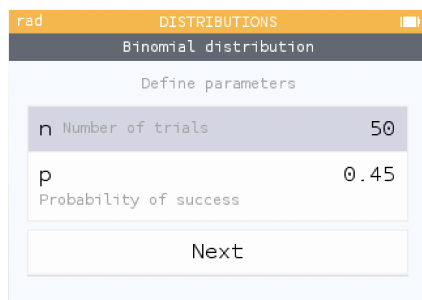
- Aller dans le mode « Distribution » de la calculatrice



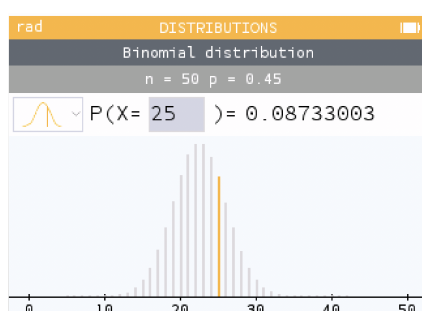
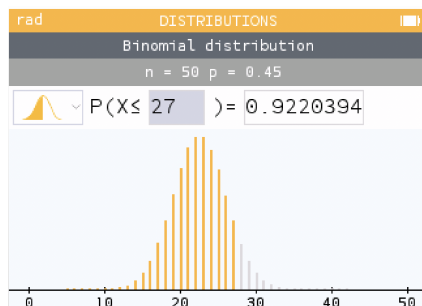
- Sélectionner « Binomial »



- Inscrire les paramètres de la loi binomiale (ici, $n = 50$ et $p = 0,45$)



- Modifier les paramètres de la calculatrice en fonction de la question posée :



Exemple :

X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{6}\right)$.

Retrouvons la loi de probabilité de X décrite à l'exemple introductif.

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ &= \frac{125}{216} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= 3 \times \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{25}{72} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{72} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \binom{3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\ &= \frac{1}{216} \end{aligned}$$

■ PROPRIÉTÉ :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de $\mathcal{B}(n; p)$. Alors

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1 - p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

Exemple :

X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{6}\right)$, donc

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \sigma(X) &= \sqrt{3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \\ &= \sqrt{3 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{5}{12}} \end{aligned}$$