

1 Méthode générale de résolution d'une question fréquemment présente dans les exercices sur les suites dans les sujets de bac

1.1 Énoncé

On définit une suite arithmético-géométrique par son premier terme et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

Il est fréquent que tombe souvent la définition d'une suite auxiliaire (v_n) , et qui nous permet d'étudier la suite (u_n) .

Le but de cette première partie est de montrer que (v_n) est une suite géométrique, dans la plupart des cas (ceci sera toujours précisé dans l'énoncé du sujet de bac).

1.2 Principe de résolution

1.2.1 Suite géométrique auxiliaire

La résolution de ce type d'exercice est toujours la même. Il faut la retenir (on pourra se souvenir des mots en gras).

Rappelons les données :

$$(1.) \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

$$(2.) \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \lambda$$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique revient à, en rappelant la **définition**, montrer que $v_{n+1} = q \times v_n$, où q est à déterminer. Ceci est donc le but, ce que l'on doit trouver à la fin.

D'après la **donnée (2.)**, on peut affirmer que $v_{n+1} = u_{n+1} - \lambda$.

Puis, d'après la **donnée (1.)**, on peut remplacer u_{n+1} par sa valeur. On a ainsi $v_{n+1} = au_n + b - \lambda$.

Ensuite, il faut **transformer la définition de la suite**. La transformation est toujours la même, au lieu que v_n soit isolé, on isole u_n . On a la relation $v_n = u_n - \lambda \iff u_n = v_n + \lambda$.

On peut ensuite **remplacer u_n** par cette nouvelle valeur dans notre calcul.

On a alors $v_{n+1} = a(u_n - \lambda) + b - \lambda$.

Enfin, on **développe** les calculs, et il suffit ensuite de **simplifier** les constantes.

On obtient alors $v_{n+1} = av_n$.

Remarque : La raison de (v_n) est la valeur de la constante présente devant u_n dans la définition de (u_n) .

1.3 Exemples d'application rédigés

1.3.1 Exemple n° 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 11 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

1. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - 4$.

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique donc on précisera le premier terme et la raison.

On a $v_n = u_n - 4$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \text{ (d'après la donnée (2.))} \\ &= \left(\frac{3}{4}u_n + 1 \right) - 4 \text{ (d'après la donnée (1.))} \\ &= \frac{3}{4}u_n - 3 \text{ (par simplification des calculs)} \\ &= \frac{3}{4}(v_n + 4) - 3 \text{ (par définition de } v_n, \text{ on a aussi } u_n = v_n + 4) \\ &= \frac{3}{4}v_n + 3 - 3 \text{ (en développant les calculs)} \\ &= \frac{3}{4}v_n \text{ (en simplifiant les constantes)} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$, dont $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = 11 - 4 = 7$.

2. Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 7$ et de raison $q = \frac{3}{4}$.

Ainsi, l'expression de son terme général est $v_n = v_0 \times q^n = 7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

On a $u_n = v_n + 4 = 7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 4$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 4$.

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 7$ et de raison $q = \frac{3}{4}$.

On a $0 < \frac{3}{4} < 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

On a $u_n = v_n + 4$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

1.3.2 Exemple n° 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{3}{4}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - 4$.

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

On a $v_n = u_n - 4$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \text{ (d'après la donnée (2.))} \\ &= \left(-\frac{3}{4}u_n + 7\right) - 4 \text{ (d'après la donnée (1.))} \\ &= -\frac{3}{4}u_n + 3 \text{ (par simplification des calculs)} \\ &= -\frac{3}{4}(v_n + 4) + 3 \text{ (par définition de } v_n, \text{ on a } u_n = v_n + 4) \\ &= -\frac{3}{4}v_n + 3 - 3 \text{ (en développant les calculs)} \\ &= -\frac{3}{4}v_n \text{ (en simplifiant les constantes)} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = -\frac{3}{4}v_n$, donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = -\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -2 - 4 = -6$.

3. Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -6$ et de raison $q = -\frac{3}{4}$.

Ainsi, l'expression de son terme général est $v_n = v_0 \times q^n = -6 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n$.

On a $u_n = v_n + 4$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -6 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n + 4$.

4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -6$ et de raison $q = -\frac{3}{4}$.

On a $-1 < -\frac{3}{4} < 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

On a $u_n = v_n + 4$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

2 Exercices

2.1 Exercice n° 1

On considère la suite (a_n) définie par $\begin{cases} a_0 = 0,5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4 \end{cases}$

a) On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n strictement positif par $u_n = a_n - 0,8$.

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n , puis en déduire que pour tout nombre entier naturel n strictement positif, $a_n = 0,8 - 0,3 \times 0,5^{n-1}$.

c) Déterminer la limite de (u_n) et en déduire la limite de (a_n) .

2.2 Exercice n° 2

On considère la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 0,45 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,75u_n + 0,15 \end{cases}$

On définit, pour tout nombre entier naturel n , la suite (w_n) par $w_n = u_n - 0,6$.

a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

b) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n et l'expression de u_n en fonction de n .

c) Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire la limite de la suite (u_n) .
Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

2.3 Exercice n° 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$

1. Déterminer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n + 6$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

3. Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2.4 Exemple n° 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

1. Déterminer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - 2$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

3. Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3 Corrigés

3.1 Exercice n° 1

a) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = a_n - 0,8$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,8 \\ &= (0,5a_n + 0,4) - 0,8 \\ &= 0,5a_n - 0,4 \end{aligned}$$

$$\text{Or, on a } u_n = a_n - 0,8 \iff a_n = u_n + 0,8$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } u_{n+1} &= 0,5(u_n + 0,8) - 0,4 \\ &= 0,5u_n + 0,4 - 0,4 \\ &= 0,5u_n \end{aligned}$$

Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_0 = a_0 - 0,8 = 0,5 - 0,8 = -0,3$.

b) (u_n) est une suite géométrique, donc son terme général est de la forme $u_n = u_1 q^{n-1}$.

$$\text{D'où } u_n = -0,3 \times (0,5)^{n-1}.$$

$$\text{Or, on a } a_n = u_n + 0,8.$$

$$\text{D'où } a_n = -0,3 \times (0,5)^{n-1} + 0,8$$

$$\text{On a bien } a_n = 0,8 - 0,3 \times (0,5)^{n-1}.$$

c) On a $0 < 0,5 < 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$.

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0. \text{ Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,8.$$

3.2 Exercice n° 2

a) On a $u_{n+1} = 0,75u_n + 0,15$ et $w_n = u_n - 0,6$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } w_{n+1} &= u_{n+1} - 0,6 \\ &= 0,75u_n + 0,15 - 0,6 \\ &= 0,75u_n - 0,45 \end{aligned}$$

$$\text{Or, } w_n = u_n - 0,6 \iff u_n = w_n + 0,6$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } w_{n+1} &= 0,75(w_n + 0,6) - 0,45 \\ &= 0,75w_n + 0,45 - 0,45 \\ &= 0,75w_n \end{aligned}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $w_0 = u_0 - 0,6 = -0,15$.

b) (w_n) est une suite géométrique, donc l'expression de son terme général est $w_n = w_0 \times q^n$.

$$\text{D'où } w_n = -0,15 \times (0,75)^n. \text{ Or, on a } u_n = w_n + 0,6.$$

$$\text{D'où } u_n = -0,15 \times (0,75)^n + 0,6. \text{ On a } 0 < 0,75 < 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0. \text{ D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0,6.$$

3.3 Exercice n° 3

1. • $u_0 = 10$

• $u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 3 = 5 - 3 = 2$

• $u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 3 = 1 - 3 = -2$

• $u_3 = \frac{1}{2}u_2 - 3 = -1 - 3 = -4$

• $u_4 = \frac{1}{2}u_3 - 3 = -2 - 3 = -5$

2. Étudions v_{n+1}

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 6$$

$$= \left(\frac{1}{2}u_n - 3 \right) + 6$$

$$= \frac{1}{2}u_n + 3$$

$$= \frac{1}{2}(v_n - 6) + 3$$

$$= \frac{1}{2}v_n - 3 + 3$$

$$= \frac{1}{2}v_n$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 + 6 = 10 + 6 = 16$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

3. On $v_n = v_0 \times q^n$, donc $v_n = 16 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n$

On a $u_n = v_n - 6$, donc $u_n = 16 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n - 6$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 16 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n - 6$

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, car $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, et $0 < q < 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -6$, car $u_n = v_n - 6$

3.4 Exercice n° 4

1. • $u_0 = 10$

• $u_1 = -\frac{1}{2}u_0 + 3 = -5 + 3 = -2$

• $u_2 = -\frac{1}{2}u_1 + 3 = 1 + 3 = 4$

• $u_3 = -\frac{1}{2}u_2 + 3 = -2 + 3 = 1$

• $u_4 = -\frac{1}{2}u_3 + 3 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$

2. Étudions v_{n+1}

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2$$

$$= \left(-\frac{1}{2}u_n + 3\right) - 2$$

$$= -\frac{1}{2}u_n + 1$$

$$= -\frac{1}{2}(v_n + 2) + 1$$

$$= -\frac{1}{2}v_n - 1 + 1$$

$$= -\frac{1}{2}v_n$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 10 - 2 = 8$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$

3. On $v_n = v_0 \times q^n$, donc $v_n = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

On a $u_n = v_n + 2$, donc $u_n = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, car $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$, et $-1 < q < 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$, car $u_n = v_n + 2$