

Séquence 3 – Suite numériques - généralités



Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3n+1}{n+1}$$

1. Que vaut u_0 ? Que vaut u_1 ? Que vaut u_{2023} ?
2. Si k est un entier naturel quelconque, que vaut u_{2k+1} ? Retrouver la valeur de u_1 et de u_{2023} grâce à cette expression.



Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \end{cases}$$

Calculer les quatre premiers termes et conjecturer l'expression de u_n en fonction de n



Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 1} \end{cases}$$

Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .



Exercice 4

Dans les deux cas suivants, déterminer la valeur de u_5 , puis le troisième terme, puis l'expression de u_{2n+1} en fonction de n :

a) Pour tout $n \geq 4$, $u_n = 3n - 20$

b) Pour tout $n \geq 0$, $u_n = \frac{n^2}{2^n}$



Exercice 5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n \end{cases}$

1. Déterminer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2. Conjecturer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n .

Séquence 3 – Suite numériques – représentation graphique



Exercice 6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{2 - v_n} \end{cases}$$

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 10w_n - 9 \end{cases}$$

Représenter graphiquement ces trois suites sur votre calculatrice.

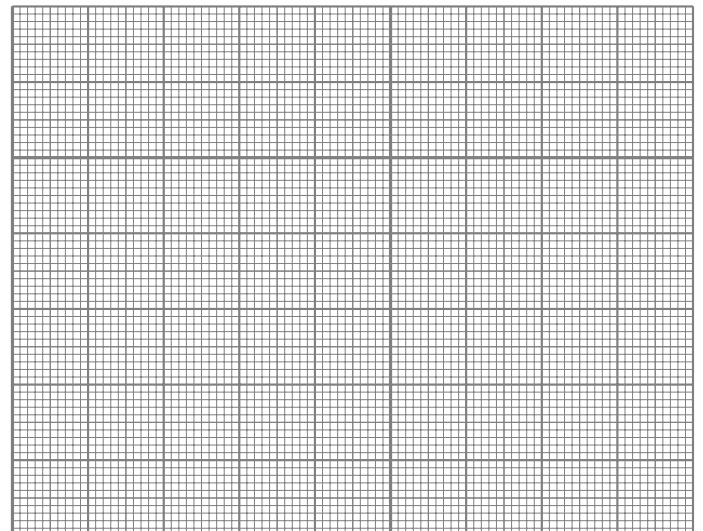


Exercice 7

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}n - 3$$

Représenter graphiquement la suite (u_n) ci-dessous.





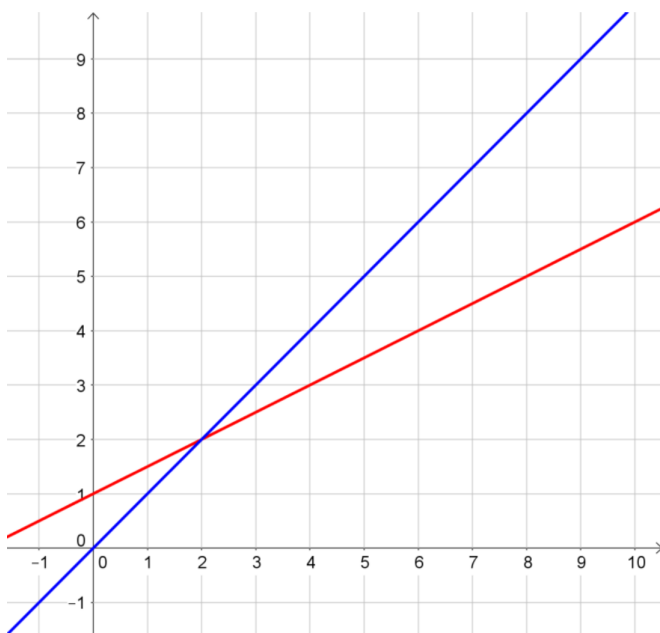
Exercice 8

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

On a représenté ci-contre la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ainsi que la première bissectrice du plan.

Représenter graphiquement les cinq premiers termes de cette suite.



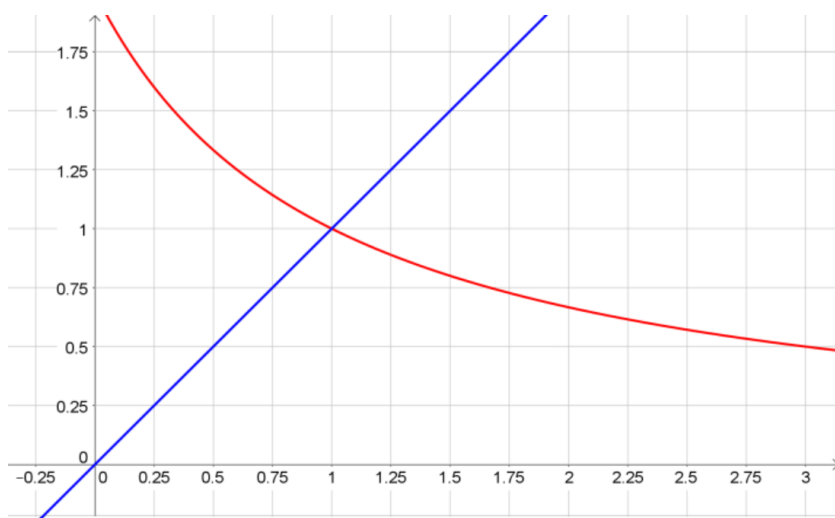
Exercice 9

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{u_n + 1} \end{cases}$$

On a représenté ci-contre la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ainsi que la première bissectrice du plan.

Représenter graphiquement les cinq premiers termes de cette suite.



Séquence 3 – Suite numériques – variations



Exercice 10

Dans chacun des cas, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

1. $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$

2. $u_n = 3n - 5$ pour $n \in \mathbb{N}$

3. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

4. $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$

5. $u_n = \frac{-2}{n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$

6. $u_n = \frac{5^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

7. $u_n = 2n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$

8. $u_n = \frac{3^n}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$



Exercice 11

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2}$$

1. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 1$.



Exercice 12

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de deux manières.

Séquence 3 – Suites arithmétiques



Exercice 13

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1} \end{cases}$$

On définit ensuite la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?



Exercice 14

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $u_1 = 5$.

Calculer u_n en fonction de n , puis calculer u_{25} .



Exercice 15

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique décroissante

définie par :

$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 270 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = 720\,000 \end{cases}$$

1. Déterminer u_0 , u_1 et u_2
2. Soit $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
Déterminer n tel que $S = 450$.



Exercice 16

Soit $S = 7 + 18 + 29 + 40 + \dots + 2\,856$.

Donner la valeur de S .



Exercice 17

Soit $S = 3 + 8 + 13 + 18 + \dots + 1\,003$.

Donner la valeur de S .



Exercice 18

On s'intéresse au forage d'un puits. Chaque mètre supplémentaire creusé coûte 30 euros de plus que le mètre précédent.

On appelle u_n le coût en euros du n -ième mètre creusé pour ce forage. On sait que le coût du premier mètre creusé est 250 euros.

1. Que vaut u_1 ? Que vaut u_2 ?
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
Justifier brièvement.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
4. Quel est le coût d'un forage de 30 mètres ?
5. Quelle est la profondeur maximale d'un puits que l'on peut forer avec un budget de 30 000 euros ?

Séquence 3 – Suites géométriques



Exercice 19

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 6n - 2n^2 + 1$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle géométrique ?



Exercice 21

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme

$$u_0 = \frac{2}{5} \text{ et de raison } q = -\frac{1}{2}.$$

Calculer u_n en fonction de n , puis calculer u_{10} .



Exercice 22

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 9 \end{cases}$$

On définit ensuite la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 18$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle géométrique ?

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle géométrique ?

Exercice 23

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique décroissante définie par :
$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 999 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = 729\,000 \end{cases}$$

Déterminer u_0 , u_1 et u_2

2. Soit $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

Déterminer n tel que $S = 999,999$.

Exercice 24

Soit $S = 5 + 15 + 45 + 135 + \dots + 295\,245$.
Donner la valeur de S .

Exercice 25

Sylvain emprunte 1000 € pendant 1 an. Son remboursement se fait par un versement unique à taux de 6,62 % annuel.

Sylvette emprunte 1000 € pendant 1 an. Son remboursement se fait par douze versements à taux de 1 % mensuel.

Combien Sylvain doit-il payer pour rembourser son emprunt ? Et combien Sylvette doit-elle payer pour rembourser son emprunt ? Qui va donc dépenser le plus d'argent ?

Exercice 26

Sylvain dispose d'un capital de 10 000 €, qu'il place dans une banque. Cette banque lui propose un revenu fixe de 110 euros par mois. On appelle u_0 le capital initial de Sylvain, et u_n son capital au bout de n mois.

Sylvette possède aussi un capital de 10 000 €, qu'elle place dans une autre banque. Elle les place à intérêts composés de 1 % par mois. On appelle v_0 le capital initial de Sylvette, et v_n son capital au bout de n mois.

1. a) Calculer u_1 et u_2 . Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
b) Calculer v_1 et v_2 . Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. a) Sylvain et Sylvette décident tous les deux de placer leur capital pendant un an.
Lequel des deux a fait le meilleur choix ?
b) Sylvain et Sylvette décident tous les deux de placer leur capital pendant deux ans.
Lequel des deux a fait le meilleur choix ?
3. a) Au bout de combien de mois le capital de Sylvain aura-t-il doublé ?
b) Au bout de combien de mois le capital de Sylvette aura-t-il doublé ?

Séquence 3 – Suites arithmetico-géométriques

Exercice 27

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 11 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

1. Déterminer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - 4$.
Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
3. Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

Exercice 28

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,5u_n + 0,4 \end{cases}$$

1. Déterminer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - 0,8$.
Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
3. Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

Séquence 3 – Limites de suites

Exercice 29

Déterminer la limite des suites suivantes :

$$u_n = n^2 + 2n - 4 \quad w_n = \frac{2}{7 + \sqrt{n}}$$

$$v_n = -n^3 + 5 \quad a_n = n\sqrt{n}$$

Exercice 30

On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = \frac{3n^2 + 2}{3n^2 + 1}$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{3 + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}}$$

En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

2. Déterminer alors les limites des suites

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \text{ et } w_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$$

Exercice 31

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n - \sqrt{n}$

1. (a) Vérifier que, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

(b) En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

2. **Autre méthode :** En factorisant u_n par $\sqrt{n}$, retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 32

Les suites suivantes admettent-elles une limite ? Utiliser la calculatrice pour conjecturer la limite éventuelle.

$$u_n = 3n^2 + 4$$

$$w_n = \cos(n)$$

$$v_n = \frac{n+5}{2n+3}$$

$$a_n = (-3)^n$$

Exercice 33

Déterminer la limite de chacune des suites ci-dessous.

$$u_n = 5 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad w_n = 1,01^n - 10\,000$$

$$v_n = 3n + 2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n \quad a_n = -2 \left(\frac{3}{5}\right)^n + 2 \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

Exercice 34

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définies sur $\mathbb{N}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = n^2$ et $v_n = -4n + 4$

2. $u_n = n(n-1)$ et $v_n = 10 - n^2$

3. $u_n = n + \cos^2(n)$ et $v_n = \sin^2(n) - n$

Exercice 35

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définies sur $\mathbb{N}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = (n+1)^2$ et $v_n = \frac{1}{2(n+1)}$

2. $u_n = 2^{2n+1}$ et $v_n = 2^{3-2n}$

3. $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = -\frac{2}{n}$

Exercice 36

Reprendre l'exercice 26 et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 37

Reprendre l'exercice 27 et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$