

Suites

1. Introduction

■ DÉFINITION : Suite numérique

On appelle **suite numérique** une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow f(n) \end{array}$$

Tout élément de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) a au plus une image dans $\mathbb{R}$.

Remarque : au plus une image signifie soit une image, soit aucune.

Notation :

- La suite f est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou encore (u_n) .
- Le nombre réel $f(n)$ est noté u_n et est le **terme général** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

⚠ Attention

Ce n'est pas nécessairement le n -ième terme de la suite.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n - 3$

Calculer les termes suivants :

- $u_0 = -3$; c'est le premier terme de la suite.
- $u_1 = -1$; c'est le deuxième terme de la suite.
- $u_2 = 1$; c'est le troisième terme de la suite.
- $u_3 = 3$; c'est le quatrième terme de la suite.
- $u_{1000} = 1997$; c'est le 1001^e terme de la suite.

⚠ Attention

En général,

$$u_{n+1} \neq u_n + 1$$

En effet, dans l'exemple précédent,

$$u_{n+1} = 2(n+1) - 3 = 2n + 2 - 3 = 2n - 1$$

$$\text{et } u_n + 1 = (2n - 3) + 1 = 2n - 2$$

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

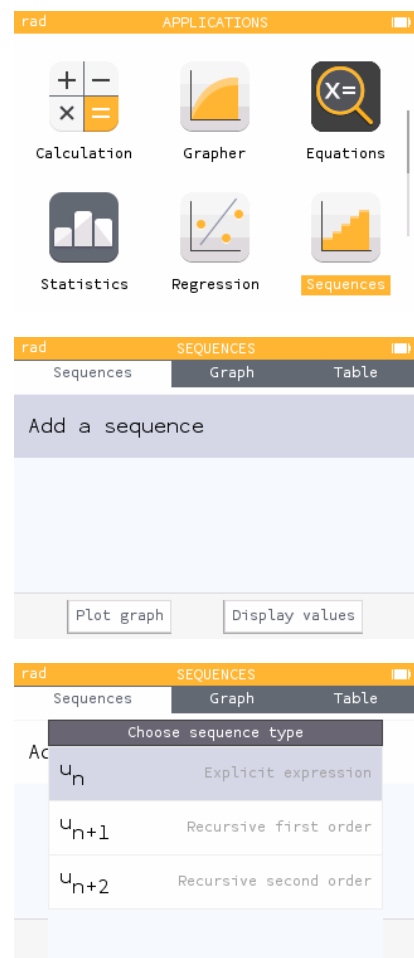
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

Calculer les termes suivants :

- $u_0 = 2$
- $u_1 = u_0 + 3 = 2 + 3 = 5$
- $u_2 = u_1 + 3 = 5 + 3 = 8$
- $u_3 = u_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

On conjecture que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n + 2$

À la calculatrice, pour calculer les premiers termes d'une suite, on peut utiliser l'onglet « Sequences » :



Puis on choisit « u_n » pour calculer les termes d'une suite comme dans le premier exemple (on dit alors que l'on a exprimé la suite de manière **explicite**) ou comme dans le second exemple (on dit alors que l'on a exprimé la suite **par récurrence**).

🇩🇪 En allemand...

- eine Folge : une suite
- das Folgeglied : le terme général d'une suite

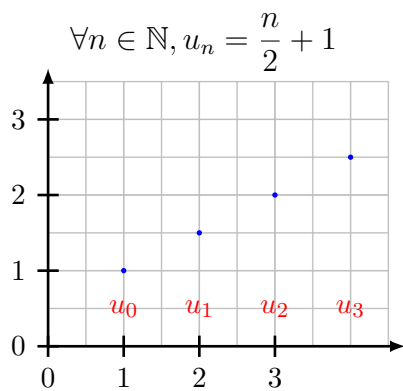
2. Représentation graphique

MÉTHODE : Suites explicites

Si la suite est définie de manière explicite, on place dans le repère les points de coordonnées $(n ; u_n)$.

Exemple :

On considère la suite définie par



Si la suite est définie par récurrence, on utilise une autre méthode :

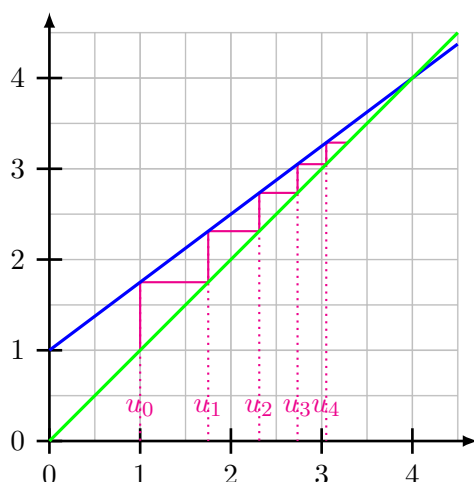
MÉTHODE : Suites définies par récurrence

1. On trace la représentation graphique de la fonction associée et la droite d'équation $y = x$. Dans un repère normé, cette droite est appelée **la première bissectrice du plan**.
2. On place le point de coordonnées $(u_0 ; 0)$.
3. On trace la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point précédemment placé.
4. On trace la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point précédemment placé.
5. On place le point d'intersection entre cette droite et la droite d'équation $y = x$.
6. On recommence à partir de l'étape 3.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$



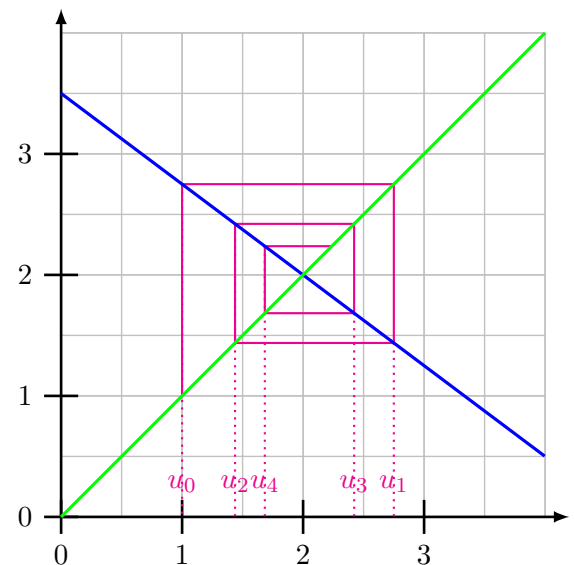
On conjecture que :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante**.
 - $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n < 4$.
 - La suite est convergente vers **4**.
- On écrit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

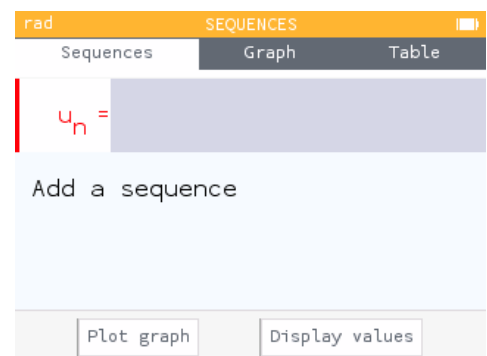
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{3}{4}u_n + 7 \end{cases}$$



On conjecture que :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **non monotone**.
 - $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n < 3$.
 - La suite est convergente vers **2**.
- On écrit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

À la calculatrice, pour tracer une suite, on saisit la suite dans la calculatrice (cf. page précédente), puis on clique sur « plot graph »



En allemand...

- der Folgegraph

3. Sens de variations

■ DÉFINITION : Suites croissantes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq u_{n+1}$$

Remarque : On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement** croissante lorsque l'inégalité est stricte.

■ DÉFINITION : Suites décroissantes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \geq u_{n+1}$$

Remarque : On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement** décroissante lorsque l'inégalité est stricte.

■ DÉFINITION : Suites monotones

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **monotone** si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante. Dans le cas contraire, on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **non monotone**.

Exemple :

Considérons la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + 1$. Cette suite est **strictement croissante**.

■ MÉTHODE : Déterminer le sens de variation d'une suite (1)

Pour déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$

■ PROPRIÉTÉ :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Remarque : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement** croissante ou **strictement** décroissante dans le cas où les inégalités sont strictes.

■ MÉTHODE : Déterminer le sens de variation d'une suite (2)

Lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement positive, elle est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (respectivement $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$).



En allemand...

- Eine monoton wachsende Folge
- Eine monoton fallende Folge
- Eine monotone Folge

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 7 \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 7$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = -2n + 7$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -2(n+1) + 7 \\ &= -2n - 2 + 7 \\ &= -2n + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } u_{n+1} - u_n &= -2n + 5 - (-2n + 7) \\ &= -2n + 5 + 2n - 7 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = 5 \times 3^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} = 5 \times 3^{n+1}$.

• Première méthode :

$$\begin{aligned} \text{Donc } u_{n+1} &= 5 \times 3^{n+1} - 5 \times 3^n \\ &= 5 \times 3^n \times 3 - 5 \times 3^n \\ &= 5 \times 3^n \times (3 - 1) \\ &= 5 \times 3^n \times 2 \\ &= 10 \times 3^n \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n > 0$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Ainsi la suite (u_n) est strictement croissante.

- Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive, on peut appliquer la **deuxième méthode** :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} = 3$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, et donc

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

4. Suites arithmétiques

■ DÉFINITION : Suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique** lorsqu'il existe un réel r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

■ DÉFINITION : Raison

Avec les notations précédentes, r est appelé la **raison de la suite arithmétique**.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 3n - 5$.

On a :

- $u_0 = -5$
- $u_1 = -2$
- $u_2 = 1$
- $u_3 = 4$
- $u_4 = 7$

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{n+1} &= 3(n+1) - 5 \\ &= 3n + 3 - 5 \\ &= 3n - 5 + 3 \\ &= u_n + 3 \end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de 1^{er} terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.

■ PROPRIÉTÉ :

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $r \in \mathbb{R}$.

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4 + 5n$$

Cette suite est la suite arithmétique définie par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$$



Attention

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r . Alors

- $u_2 = u_1 + r$
- $u_3 = u_2 + r = u_1 + r + r = u_1 + 2r$
- $u_4 = u_3 + r = u_1 + 2r + r = u_1 + 3r$
- $u_5 = u_4 + r = u_1 + 3r + r = u_1 + 4r$

On a ici : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 + (n-1)r$.

■ PROPRIÉTÉ :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$



Attention

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r .

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = n \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right)$$

Exemple : la suite de Gauß

Soit $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$. Donner la valeur de S .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison 1 .

On peut écrire $S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$

$$\text{Donc } S = n \left(\frac{1+n}{2} \right)$$

$$\text{Ainsi, } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Application : } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 1000 = \frac{1000 \times 1001}{2} = 500\,500.$$



En allemand...

- eine arithmetische Folge
- der Differenz einer arithmetischen Folge

5. Suites géométriques

■ DÉFINITION : Suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** lorsque il existe un réel q non nul tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$$

■ DÉFINITION : Raison

Avec les notations précédentes, q est appelé la **raison de la suite géométrique**.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 2 \times 3^n$.

On a :

- $u_0 = 2 \times 3^0 = 2 \times 1 = 2$
- $u_1 = 2 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$
- $u_2 = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$
- $u_3 = 2 \times 3^3 = 2 \times 27 = 54$
- $u_4 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{n+1} &= 2 \times 3^{n+1} \\ &= 2 \times (3^n \times 3) \\ &= (2 \times 3^n) \times 3 \\ &= u_n \times 3 \end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times 3$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

■ PROPRIÉTÉ :

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $q \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Cette suite est la suite géométrique définie par

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2} \end{cases}$$



Attention

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite géométrique de premier terme u_1 et de raison $q \neq 0$. On a :

- $u_2 = u_1 \times q$
- $u_3 = u_2 \times q = u_1 \times q \times q = u_1 \times q^2$
- $u_4 = u_3 \times q = u_1 \times q^2 \times q = u_1 \times q^3$
- $u_5 = u_4 \times q = u_1 \times q^3 \times q = u_1 \times q^4$

On a ici : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

■ PROPRIÉTÉ :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$.

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$



Attention

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite géométrique de premier terme u_1 et de raison $q \neq 1$.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Exemple :

$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n$. Calculer S .

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n.$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$.

S n'est pas une suite géométrique mais la somme des termes d'une suite géométrique.

La somme des termes de la suite est donnée par

$$S = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

$$S = 1 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

$$S = -1 \times (1 - 2^{n+1})$$

$$S = -1 + 2^{n+1}$$

$$\text{Donc } 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = -1 + 2^{n+1}$$



En allemand...

- eine geometrische Folge
- der Quotient einer geometrischen Folge

6. Suites arithmético-géométriques

■ DÉFINITION : Suite arithmético-géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe deux réels a et b , avec a non nul, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Exemple :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 4 \end{cases}$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite arithmétique :

Calculons les trois premiers termes de la suite :

$$\begin{aligned} * u_0 &= 1 \\ * u_1 &= -2 \times 1 + 4 = 2 \\ * u_2 &= -2 \times 2 + 4 = 0 \end{aligned}$$

On a $u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$ et $u_2 - u_1 = 0 - 2 = -2$

Donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite arithmétique.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite géométrique :

$$\text{On a } \frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2 \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{0}{2} = 0$$

Donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite géométrique.

■ PROPRIÉTÉ :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Ainsi, il existe deux réels a et b , avec $a \neq 1$, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

On considère la suite (v_n) définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + \lambda$ où $\lambda = \frac{-b}{1-a}$.

Alors (v_n) est une suite géométrique de raison a .

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$$

Ici $a = \frac{1}{2}$ et $b = -3$.

On pose ainsi $\lambda = \frac{-b}{1-a} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_n + 6$$

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= u_{n+1} + 6 \\ &= \left(\frac{1}{2}u_n - 3\right) + 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 3 \\ &= \frac{1}{2}(v_n - 6) + 3 \\ &= \frac{1}{2}v_n - 3 + 3 \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 + 6 = 10 + 6 = 16$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

Ainsi $v_n = v_0 \times q^n$, donc $v_n = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a $u_n = v_n - 6$, donc $u_n = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$



En allemand...

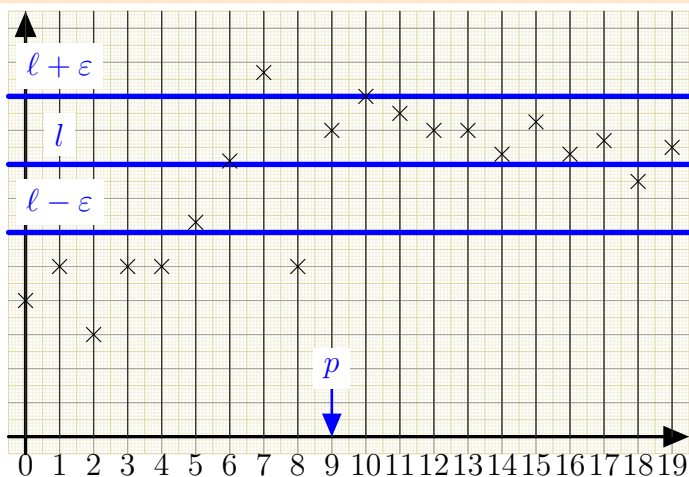
.

7. Limites de suites

A. Suites convergentes

■ DÉFINITION :

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ si tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang p .



Notation : Avec les hypothèses précédentes, on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

Remarque : Dans la définition, l'entier p dépend de l'intervalle ouvert.

Remarque : Pour $\varepsilon > 0$, comme

$$\begin{aligned} \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon &\iff -\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon \\ &\iff |u_n - \ell| < \varepsilon \end{aligned}$$

la phrase

« Pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$ contient tous les termes u_n à partir du rang p »

est équivalente à la phrase

« Pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]-\varepsilon ; \varepsilon[$ contient tous les $u_n - \ell$ à partir du rang p »

qui est elle-même équivalente à

« Pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]0 ; \varepsilon[$ contient tous les $|u_n - \ell|$ à partir du rang p »

Autrement dit

■ PROPRIÉTÉ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0 \\ &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0 \end{aligned}$$

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n}$$

ε étant un réel positif, résoudre l'inéquation $|u_n - 2| < \varepsilon$. Conclure.

$$\begin{aligned} |u_n - 2| < \varepsilon &\iff \left| 2 - \frac{(-1)^n}{n} - 2 \right| < \varepsilon \\ &\iff \left| -\frac{(-1)^n}{n} \right| < \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{n} < \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{\varepsilon} < n \end{aligned}$$

■ PROPRIÉTÉ :

Les suites de termes généraux $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ et plus généralement $\frac{1}{n^q}$ pour tout entier naturel q non nul convergent vers 0.

La suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0.

On pourra sans justification utiliser la convergence vers 0 de ces suites. En pratique, pour montrer qu'une suite converge, on n'utilise rarement la définition, mais plutôt ces exemples fondamentaux et plusieurs théorèmes :

■ THÉORÈME :

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$ alors

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$
- Si $\ell' \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{\ell}{\ell'}$

Exemple :

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} \right)$

On sait que

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2} = 0$

Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} \right) = 3$.

Exemple :

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

On sait que

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$.

De plus,

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3$.

Par limite de produit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 6.$$

Exemple :

Vérifier que pour tout entier naturel non nul,

$$\frac{3n^2 - 4}{2n^2 + 1} = \frac{3}{2} \times \frac{1 - \frac{4}{3n^2}}{1 + \frac{1}{2n^2}}$$

et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 4}{2n^2 + 1}$

Pour $n \neq 0$,

$$\frac{3n^2 - 4}{2n^2 + 1} = \frac{3n^2 \left(1 - \frac{4}{3n^2}\right)}{2n^2 \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)} = \frac{3}{2} \times \frac{1 - \frac{4}{3n^2}}{1 + \frac{1}{2n^2}}$$

- Au numérateur : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{4}{3n^2} = 0$ et par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{4}{3n^2} = 1$.
- Au dénominateur : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2n^2} = 0$ et par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2n^2} = 1$.

Par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \times \frac{1 - \frac{4}{3n^2}}{1 + \frac{1}{2n^2}} = \frac{3}{2}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 4}{2n^2 + 1} = \frac{3}{2}$.

■ DÉFINITION :

Si une suite ne converge pas, alors on dit qu'elle **diverge**.

B. Suites divergentes vers $+\infty$

Exemple :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.

Peut-on trouver un entier p tel que, pour tout entier $n \geq p$, $u_n > 10^4$?

On cherche p tel que, pour tout $n \geq p$, $n^2 > 10^4$, donc tel que $n > 10^2$.

Notons $p = 10^2 - 1$. Soit $n \geq p$, alors $n \geq 10^2 - 1$. Donc $n > 10^2$. Ainsi, pour tout $n \geq p$, $n^2 \geq 10^4$.

Peut-on trouver un entier p tel que, pour tout entier $n \geq p$, $u_n > 10^{90}$?

Par le même raisonnement, pour $p = 10^{45} - 1$, on a pour tout $n \geq p$, $u_n \geq 10^{90}$.

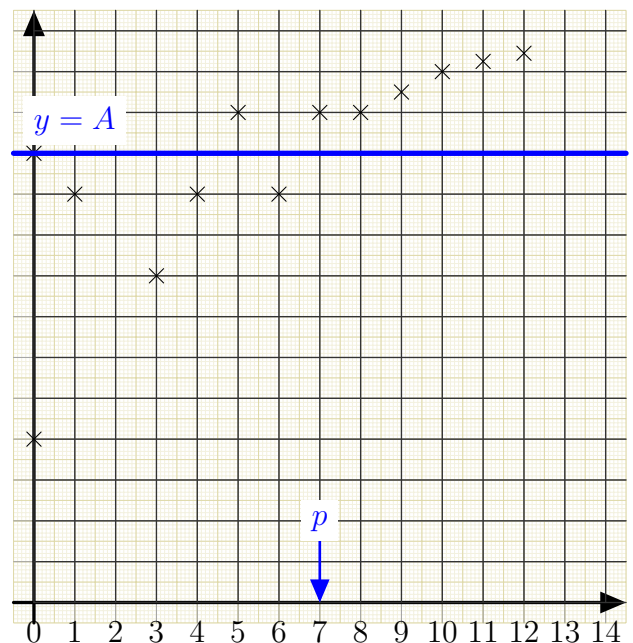
Peut-on trouver un entier p tel que, pour tout entier $n \geq p$, $u_n > A$, où A est un nombre positif quelconque, aussi grand que l'on veut ?

Par le même raisonnement, pour $p = \sqrt{A} - 1$, on a pour tout $n \geq p$, $u_n \geq A$.

On dit alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (quand n tend vers $+\infty$). Plus généralement :

■ DÉFINITION :

On dit que **la suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $[A ; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang p .



Notation : Avec les hypothèses précédentes, on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Exemple :

Montrer qu'une suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison 3 tend vers $+\infty$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 3. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + 3n$. On sait que :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 = u_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, et par limite de produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty$

Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

Comme précédemment, en pratique, on utilise plutôt quelques théorèmes que la définition :

■ THÉORÈME :

Les suites de termes généraux n , n^2 et plus généralement n^q pour tout entier naturel q non nul tendent vers $+\infty$. La suite de terme général $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$.

■ DÉFINITION :

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, lorsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$$

Exemple :

On note, par exemple $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3) = -\infty$

C. Autre cas

Exemple :

Intéressons-nous à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$.

Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ , alors l'intervalle $\left] \ell - \frac{1}{2} ; \ell + \frac{1}{2} \right[$ par exemple, doit contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p , donc en particulier contenir 1 et -1 . Mais cet intervalle a une amplitude de 1, donc il ne peut pas contenir simultanément -1 et 1, qui sont distants de 2. Donc il y a une contradiction, et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, elle diverge.

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors l'intervalle $[1 ; +\infty[$ doit contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Mais cet intervalle ne contient pas -1 . Donc la suite ne tend pas vers $+\infty$. De même, elle ne tend pas vers $-\infty$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge et n'a pas de limite.

D. Cas particulier des suites géométriques

■ THÉORÈME :

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$, alors la suite de terme général q^n n'a pas de limite.

Exemple :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = 10^{99} \left(\frac{1}{2} \right)^n$

On a $-1 < \frac{1}{2} < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$.

Par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10^{99} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$

Exemple :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \left(\frac{7}{2} \right)^n \times \left(\frac{1}{3} \right)^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $\left(\frac{7}{2} \right)^n \times \left(\frac{1}{3} \right)^n = \left(\frac{7}{2} \times \frac{1}{3} \right)^n = \left(\frac{7}{6} \right)^n$.

$1 < \frac{7}{6}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{6} \right)^n = +\infty$, et donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{2} \right)^n \times \left(\frac{1}{3} \right)^n = +\infty$

⚠ Attention

On vient de montrer avec l'exemple précédent que le produit d'une suite tendant vers 0 par une suite tendant vers $+\infty$ n'est pas nécessairement une suite qui tend vers 0.

Exemple :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right]$

On a $-1 < \frac{1}{3} < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0$.

Par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} - \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0$

Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n = 1$

Par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] = 5$

D. Limites et opérations

On admet les théorèmes suivants. Dans les tableaux ci-dessous, ℓ et ℓ' sont deux nombres réels. ? signifie qu'on ne peut pas *a priori* donner de résultat : il s'agit d'une **forme indéterminée** ; il faudra déterminer la limite, si elle existe, par d'autres techniques.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$ signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ de sorte qu'au voisinage de $+\infty$, $v_n > 0$.

■ THÉORÈME : Limite d'une somme

$(u_n) \backslash (v_n)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	??
$-\infty$	$-\infty$	??	$-\infty$

■ THÉORÈME : Limite d'un produit

$(u_n) \backslash (v_n)$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	$\ell \times \ell'$			$+\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$				$-\infty$	$+\infty$
$\ell = 0$				??	
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	??	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$

■ THÉORÈME : Limite d'un quotient

$(u_n) \backslash (v_n)$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$			$+\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$				$-\infty$	$+\infty$
$\ell = 0$				??	
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	??
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

Remarque : Les cas « **formes indéterminées** » sont parce que de telles formes peuvent conduire, selon les cas, à des réponses différentes.

Exemples :

Les trois limites suivantes sont celles du produit d'une suite de limite $+\infty$ par une suite de limite 0 :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \times \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \times \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \times \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$

Les trois limites calculées sont différentes : on ne peut donc donner aucun résultat général de ce type de limite.

On peut trouver de tels exemples pour chacune des quatre formes indéterminées signalées par un ?.



En allemand...

- la limite : der Grenzwert (-es, -e)
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert