

Séquence 1

Exercices supplémentaires – Notion de dérivation

Exercice 1

Soit h un nombre réel non nul. Le taux de variation entre 4 et $4 + h$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est $2 + h$.

- Traduire la phrase précédente sous la forme d'une égalité.
- f est-elle dérivable en 4 ? Si oui, quel est son nombre dérivé en 4 ?

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et h un nombre réel non nul. On sait que

$$\frac{f(-7+h) - f(-7)}{h} = \frac{5}{3}(4h+9)$$

Peut-on dire que la fonction f est dérivable en -7 ? Si oui, déterminer $f'(-7)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 8x - 2$$

- Calculer $f(-2)$
- Soit h un nombre réel non nul. Exprimer $f(-2+h)$ en fonction de h .
- Calculer $T(h)$, en simplifiant l'expression au maximum.
- La fonction f est-elle dérivable en -2 ? Justifier soigneusement.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et h un nombre réel non nul.

- En appliquant la même méthode que dans le cours (qui est redétaillée à l'exercice précédent), montrer que f est dérivable en 3 et déterminer $f'(3)$.
- De la même manière, montrer que f est dérivable en -2 et déterminer $f'(-2)$.

Exercice 5

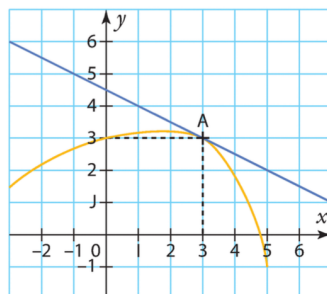
Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x+4}{x-2}$$

Montrer que f est dérivable en $x_0 = 3$ et déterminer $f'(3)$.

Exercice 6

La courbe d'une fonction g définie sur $[-3; 5]$ est représentée ci-contre. La tangente à cette courbe au point A d'abscisse 3 passe par le point de coordonnées $(3; 3)$.



- Que vaut $g(3)$?
- Que vaut $g'(3)$?

Exercice 1

Soit h un nombre réel non nul. Le taux de variation entre 4 et $4 + h$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est $2 + h$.

1. Traduire la phrase précédente sous la forme d'une égalité.
2. f est-elle dérivable en 4? Si oui, quel est son nombre dérivé en 4?

$$\textcircled{1} \tau(h) = \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

Donc

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = 2 + h$$

$$\textcircled{2} \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 2$$

Donc f est dérivable en 4 et

$$f'(4) = 2.$$

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et h un nombre réel non nul. On sait que

$$\frac{f(-7+h) - f(-7)}{h} = \frac{5}{3}(4h+9)$$

Peut-on dire que la fonction f est dérivable en -7 ?
Si oui, déterminer $f'(-7)$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-7+h) - f(-7)}{h} &= \frac{5}{3} \times 9 \\ &= 5 \times 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Ainsi f est dérivable en -7 et

$$f'(-7) = 15$$

Exercise 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 8x - 2$$

1. Calculer $f(-2)$
2. Soit h un nombre réel non nul. Exprimer $f(-2+h)$ en fonction de h .
3. Calculer $T(h)$, en simplifiant l'expression au maximum.
4. La fonction f est-elle dérivable en -2 ? Justifier soigneusement.

$$\begin{aligned} ① \quad f(-2) &= (-2)^2 + 8 \times (-2) - 2 \\ &= 4 - 16 - 2 \\ &= 4 - 18 \\ &= -14 \end{aligned}$$

Donc $f(-2) = -14$

$$\begin{aligned} ② \quad f(-2+h) &= (-2+h)^2 + 8 \times (-2+h) - 2 \\ &= 4 - 4h + h^2 - 16 + 8h - 2 \end{aligned}$$

$$f(-2+h) = h^2 + 4h - 14$$

$$\begin{aligned} ③ \quad T(h) &= \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\ &= \frac{h^2 + 4h - 14 - (-14)}{h} \\ &= \frac{h^2 + 4h}{h} \\ &= \frac{h(h+4)}{h} \end{aligned}$$

$$T(h) = h + 4 \quad \text{car } h \neq 0$$

$$④ \quad \lim_{h \rightarrow 0} T(h) = 4.$$

Donc f est dérivable en -2 et $f'(-2) = 4$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et h un nombre réel non nul.

1. En appliquant la même méthode que dans le cours (qui est redétaillée à l'exercice précédent), montrer que f est dérivable en 3 et déterminer $f'(3)$.
2. De la même manière, montrer que f est dérivable en -2 et déterminer $f'(-2)$.

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \quad \tau(h) &= \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \frac{(3+h)^2 + 1 - (3^2 + 1)}{h} \\ &= \frac{9 + 6h + h^2 + 1 - 10}{h} \\ &= \frac{h^2 + 6h}{h} \\ &= \frac{h(h+6)}{h} \\ &= h + 6 \quad \text{car } h \neq 0\end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 6$$

Donc f est dérivable en 3 et

$$f'(3) = 6$$

$$\begin{aligned}\textcircled{2} \quad \tau(h) &= \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\ &= \frac{(-2+h)^2 + 1 - ((-2)^2 + 1)}{h} \\ &= \frac{4 - 4h + h^2 + 1 - 5}{h} \\ &= \frac{h^2 - 4h}{h} \\ &= \frac{h(h-4)}{h} \\ &= h - 4 \quad \text{car } h \neq 0\end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = -4$$

Donc f est dérivable en -2 et

$$f'(-2) = -4$$

Exercise 5

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x+4}{x-2}$$

Montrer que f est dérivable en $x_0 = 3$ et déterminer $f'(3)$.

$$\begin{aligned}\tau_1(h) &= \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\&= \frac{\frac{3+h+4}{3+h-2} - \frac{3+4}{3-2}}{h} \\&= \frac{\frac{h+7}{h+1} - 7}{h} \\&= \frac{\frac{h+7 - 7(h+1)}{h+1}}{h} \\&= \frac{\frac{h+7-7h-7}{h+1}}{h} \\&= \frac{\frac{-6h}{h+1}}{h} \\&= \frac{-6h}{h+1} \times \frac{1}{h}\end{aligned}$$

$$\tau_1(h) = \frac{-6}{h+1} \text{ car } h \neq 0$$

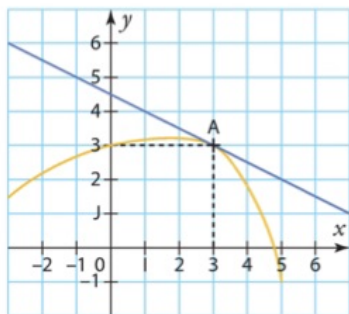
$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_1(h) = -6$$

Donc f est dérivable en 3

$$\text{et } f'(3) = -6$$

Exercice 6

La courbe d'une fonction g définie sur $[-3; 5]$ est représentée ci-contre. La tangente à cette courbe au point A d'abscisse 3 passe par le point de coordonnées $(3; 3)$.



1. Que vaut $g(3)$?

2. Que vaut $g'(3)$?

① Par lecture graphique, $g(3) = 3$

② On sait que $g'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse $x_0 = 3$

Par lecture graphique, $g'(3) = -\frac{1}{2}$