

Séquence 1 – Notion de dérivation

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \in]-\infty ; -2[\\ -x - 2 & \text{si }]-2 ; 2[\\ x + 2 & \text{si }]2 ; +\infty[\end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f sur le cahier. Se placer dans un repère orthonormé dont l'unité pour chacun des axes est un carreau.
2. La limite quand x tend vers -2 existe-t-elle ? Si oui, donner sa valeur, sinon, donner la valeur des limites à gauche et à droite.
2. La limite quand x tend vers 2 existe-t-elle ? Si oui, donner sa valeur, sinon, donner la valeur des limites à gauche et à droite.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+19} - 5}{x-6}$$

1. Sur quelle réunion d'intervalles est définie la fonction f ?
2. Déterminer, si elle existe, la limite de $f(x)$ quand x tend vers 6 .

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

Calculer le nombre dérivé de f en $x_0 = 2$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Montrer que f est dérivable en $x_0 = 5$ et calculer le nombre dérivé en 5 .

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

Montrer que f est dérivable en $x_0 = -3$ et calculer le nombre dérivé en -3 .

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Montrer que f est dérivable en $x_0 = 4$ et calculer le nombre dérivé en 4 .

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[-11 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+11} - 1$$

Montrer que f est dérivable en $x_0 = -2$ et calculer le nombre dérivé en -2 .

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

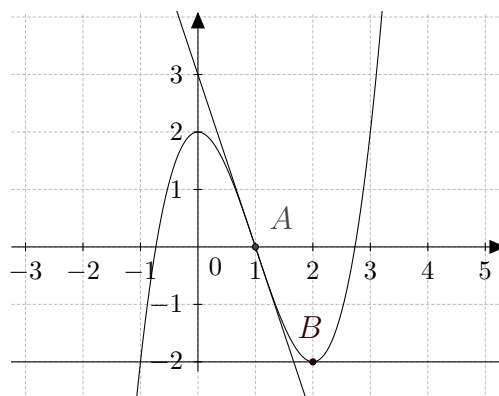
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point I d'abscisse 1 .

Exercice 9

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soient A et B les deux points de cette courbe de coordonnées respectives : $A(1 ; 0)$ et $B(2 ; -2)$. On appelle T_1 et T_2 les tangentes à la courbe, respectivement en A et en B .



1. a) Par lecture graphique, déterminer $f'(1)$ et $f'(2)$.
b) Déterminer une équation de T_1 et T_2
2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

Retrouver par le calcul les résultats obtenus par lecture graphique à la question 1)a).

Approfondissement



Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-8}{x-3} & \text{si } x \in]-\infty ; 2[\\ -x^2 + 6x - 4 & \text{si } x \in]2 ; 5[\\ \frac{2x-8}{x-3} & \text{si } x \in]5 ; +\infty[\\ f(2) = 4 \\ f(5) = 1 \end{cases}$$

On donne la représentation graphique ci-dessous :



1. Montrer que f est dérivable en $x_0 = 2$.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en $x_0 = 5$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer l'équation des **demi-tangentes** à droite et à gauche au point d'abscisse $x_0 = 5$.

Correction

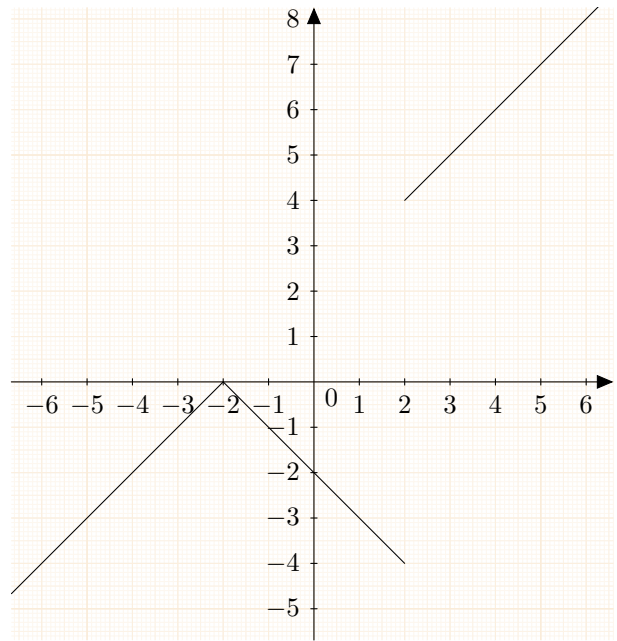
Exercice n° 1

1. On a la représentation graphique ci-contre.
2. Graphiquement, on a

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ n'existe pas. Cependant :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -4 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = 4.$$



Exercice n° 2 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x+19} - 5}{x-6}$

Il faut que $x+19 \geq 0 \iff x \geq -19$.

Il ne faut pas que $x-6 = 0 \iff x = 6$.

Donc f est définie sur $[-19 ; 6[\cup]6 ; +\infty[$.

On cherche la limite de $f(x)$ quand x tend vers 6.

$$\lim_{x \rightarrow 6} (\sqrt{x+19} - 5) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 6} (x-6) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Cependant, } f(x) &= \frac{\sqrt{x+19} - 5}{x-6} \\ &= \frac{(\sqrt{x+19} - 5)(\sqrt{x+19} + 5)}{(x-6)(\sqrt{x+19} + 5)} \\ &= \frac{x+19-25}{(x-6)(\sqrt{x+19} + 5)} \\ &= \frac{x+19-25}{(x-6)(\sqrt{x+19} + 5)} \\ &= \frac{x-6}{(x-6)(\sqrt{x+19} + 5)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+19} + 5} \text{ pour } x \neq 6 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 6} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{\sqrt{x+19} + 5} = \frac{1}{10}$$

Exercice n° 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x - 5$

Montrons que f est dérivable en $x_0 = 2$. On a $f(2) = 2^2 + 4 \times 2 - 5 = 7$.

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } h \neq 0, T(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
 &= \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} \\
 &= \frac{(2 + h)^2 + 4(2 + h) - 5 - 7}{h} \\
 &= \frac{h^2 + 4h + 4 + 8 + 4h - 12}{h} \\
 &= \frac{h^2 + 8h}{h} \\
 &= \frac{h(h + 8)}{h} \\
 &= h + 8 \text{ pour } h \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 8) = 8.$$

Donc f est dérivable en $x_0 = 2$ et $f'(2) = 8$.

Exercice n° 4

Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

Montrons que f est dérivable en $x_0 = 5$. On a $f(5) = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } h \neq 0, T(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
 &= \frac{f(5 + h) - f(5)}{h} \\
 &= \frac{\frac{1}{5 + h} - \frac{1}{5}}{h} \\
 &= \frac{\frac{5 - (5 + h)}{5(5 + h)}}{h} \\
 &= \frac{5 - 5 - h}{5(5 + h)} \\
 &= \frac{-h}{5(5 + h)} \\
 &= \frac{-h}{5(5 + h)} \times \frac{1}{h} \\
 &= \frac{-1}{5(5 + h)} \text{ car } h \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{5(5 + h)} = \frac{-1}{25}. \text{ Donc } f \text{ est dérivable en } x_0 = 5 \text{ et } f'(5) = -\frac{1}{25}.$$

Exercice n° 5

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Montrons que f est dérivable en $x_0 = -3$. On a $f(-3) = \frac{-3-1}{-3+1} = \frac{-4}{-2} = 2$

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } h \neq 0, T(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
 &= \frac{f(-3 + h) - f(-3)}{h} \\
 &= \frac{\frac{-3+h-1}{-3+h+1} - 2}{h} \\
 &= \frac{\frac{-4+h}{-2+h} - \frac{2(-2+h)}{-2+h}}{h} \\
 &= \frac{\frac{-4+h}{-2+h} - \frac{-4+2h}{-2+h}}{h} \\
 &= \frac{\frac{-4+h}{-2+h} + \frac{4-2h}{-2+h}}{h} \\
 &= \frac{\frac{-h}{-2+h}}{h} \\
 &= \frac{-h}{h(-2+h)} \\
 &= \frac{-1}{(-2+h)} \text{ car } h \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{-2+h} = \frac{1}{2}. \text{ Donc } f \text{ est dérivable en } x_0 = -3 \text{ et } f'(-3) = \frac{1}{2}.$$

Exercice n° 6

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Montrons que f est dérivable en $x_0 = 4$. On a $f(4) = \sqrt{4} = 2$

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } h \neq 0, T(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
 &= \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} \\
 &= \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \\
 &= \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \text{ car } \sqrt{4+h} + 2 \neq 0 \\
 &= \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\
 &= \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{4}. \text{ Donc } f \text{ est dérivable en } x_0 = 4 \text{ et } f'(4) = \frac{1}{4}.$$

Exercice n° 7

Soit f la fonction définie sur $[-11 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+11} - 1$.

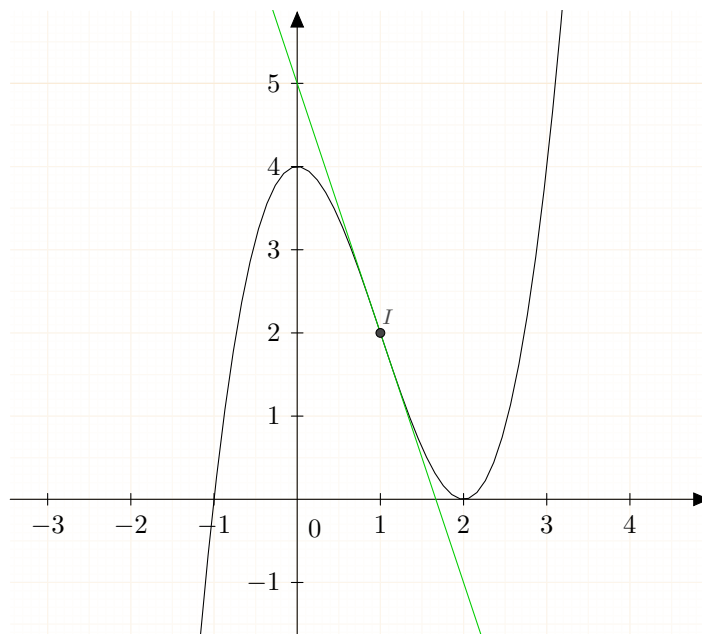
Montrons que f est dérivable en $x_0 = -2$. On a $f(-2) = \sqrt{-2+11} - 1 = 2$

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } h \neq 0, T(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{-2 + h + 11} - 1) - 2}{h} \\ &= \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{9 + h} - 3)(\sqrt{9 + h} + 3)}{h(\sqrt{9 + h} + 3)} \\ &= \frac{9 + h - 9}{h(\sqrt{9 + h} + 3)} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{9 + h} + 3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9 + h} + 3} \text{ car } h \neq 0\end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{9 + h} + 3} = \frac{1}{6}. \text{ Donc } f \text{ est dérivable en } x_0 = -2 \text{ et } f'(-2) = \frac{1}{6}.$$

Exercice n° 8

On a la représentation graphique suivante :



On cherche l'équation de la tangente au point $I(1 ; 2)$. D'après le cours, l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

On sait que $f(1) = 2$. Déterminons $f'(1)$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } h \neq 0, T(h) &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{[(1+h)^3 - 3(1+h)^2 + 4] - 2}{h} \\ &= \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3(1 + 2h + h^2) + 4 - 2}{h} \\ &= \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3 - 6h - 3h^2 + 4 - 2}{h} \\ &= \frac{h^3 - 3h}{h} \\ &= \frac{h(h^2 - 3)}{h} \\ &= h^2 - 3 \text{ car } h \neq 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 - 3) = -3. \text{ D'où } f'(1) = -3$$

Dans l'équation de la tangente au point $I(1 ; 2)$:

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = -3(x - 1) + 2$$

$$y = -3x + 3 + 2$$

$$y = -3x + 5$$

Donc la droite tangente à la courbe au point $I(1 ; 2)$ a pour équation $y = -3x + 5$.

Exercice n° 9 :

1. a) Par lecture graphique, on a $f'(-1) = -3$ et $f'(2) = 0$.

b) On cherche l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

$f'(1) = -3$ d'après la question 1. a), et $f(1) = 0$ car $A(1, 0)$.

D'où $T_1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, i.e. $y = -3(x - 1) + 0$.

On en conclut que $T_1 : y = -3x + 3$.

De plus, T_2 est la représentation graphique d'une fonction affine dont le coefficient directeur est nul et l'ordonnée à l'origine est -2 , donc $T_2 : y = -2$.

2. Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$.

f est une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$ en calculant la limite du taux de variations en un x quelconque.

On retrouve ainsi les résultats de la question 1.a) :

$f'(1) = 3 \times 1^2 - 6 = -3$ et $f'(2) = 3 \times 2^2 - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$.

Exercice n° 10 :

1. • « À gauche de $x_0 = 2$ », c'est-à-dire pour tout $x < 2$, $f(x) = \frac{2x - 8}{x - 3}$

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } h \neq 0, T(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
 &= \frac{\frac{2(2+h) - 8}{2+h-3} - \frac{2 \times 2 - 8}{2-3}}{h} \\
 &= \frac{\frac{4+2h-8}{h-1} - \frac{4-8}{-1}}{h} \\
 &= \frac{\frac{2h-4}{h-1} - 4}{h} \\
 &= \frac{2h-4-4(h-1)}{h(h-1)} \\
 &= \frac{2h-4-4h+4}{h(h-1)} \\
 &= \frac{-2h}{h(h-1)} \times \frac{1}{h} \\
 &= \frac{-2}{h-1} \text{ pour } h \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0^-} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2}{h-1} = 2.$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 2$ et $f'_g(2) = 2$.

- « À droite de $x_0 = 2$ », c'est-à-dire pour tout $x \in]-2 ; 5[$, $f(x) = -x^2 + 6x - 4$

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } h \neq 0, T(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
 &= \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} \\
 &= \frac{-(2 + h)^2 + 6(2 + h) - 4 - (-2^2 + 6 \times 2 - 4)}{h} \\
 &= \frac{-(4 + 4h + h^2) + 12 + 6h - 4 - (-4 + 12 - 4)}{h} \\
 &= \frac{-4 - 4h - h^2 + 12 + 6h - 4 + 4 - 12 + 4}{h} \\
 &= \frac{-h^2 - 2h}{h} \\
 &= \frac{h(-h - 2)}{h} \\
 &= -h - 2 \text{ pour } h \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0^+} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} -h - 2 = -2.$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 2$ et $f'_d(2) = -2$.

D'où f est dérivable en $x_0 = 2$ et $f'(2) = -2$.

- À gauche de $x_0 = 5$, c'est-à-dire pour tout $x \in]-2 ; 5[$, $f(x) = -x^2 + 6x - 4$

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } h \neq 0, T(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
 &= \frac{f(5 + h) - f(5)}{h} \\
 &= \frac{[-(5 + h)^2 + 6(5 + h) - 4] - (-5^2 + 6 \times 5 - 4)}{h} \\
 &= \frac{-(25 + 10h + h^2) + 30 + 6h - 4 - (-25 + 30 - 4)}{h} \\
 &= \frac{-25 - 10h - h^2 + 30 + 6h - 4 - 1}{h} \\
 &= \frac{-h^2 - 4h}{h} \\
 &= \frac{h(-h - 4)}{h} \\
 &= -h - 4 \text{ pour } h \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0^-} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} -h - 4 = -4.$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 5$ et $f'_g(5) = -4$.

- À droite de $x_0 = 5$, c'est-à-dire pour tout $x > 5$, $f(x) = \frac{2x - 8}{x - 3}$

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } h \neq 0, T(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
 &= \frac{f(5 + h) - f(5)}{h} \\
 &= \frac{\frac{2(5 + h) - 8}{5 + h - 3} - \frac{2 \times 5 - 8}{5 - 3}}{h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(h) &= \frac{\frac{10+2h-8}{h+2} - 1}{h} \\
&= \frac{\frac{10+2h-8-(h+2)}{h+2}}{h} \\
&= \frac{\frac{10+2h-8-h-2}{h+2}}{h} \\
&= \frac{h}{h+2} \times \frac{1}{h} \\
&= \frac{1}{h+2} \text{ pour } h \neq 0
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0^+} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h+2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } f \text{ est dérivable à droite en } x_0 = 5 \text{ et } f'_d(5) = \frac{1}{2}.$$

D'où f n'est pas dérivable en $x_0 = 5$.

3. f est dérivable en $x_0 = 2$ et $f'(2) = 2$. De plus, $f(2) = 4$.

D'après le cours, l'équation de la tangente au point $A(2 ; 4)$ est

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$y = 2(x-2) + 4$$

$$y = 2x - 4 + 4$$

$$y = 2x$$

4. f n'est pas dérivable en $x_0 = 5$. Donc C_f n'admet pas de tangente au point $B(5 ; 1)$.

Cependant :

* C_f est dérivable à gauche en $x_0 = 5$ et $f'_g(5) = -4$

Donc f admet une demi-tangente à gauche au point $B(5 ; 1)$.

$$y = f'_g(5)(x-5) + f(5)$$

$$y = -4(x-5) + 1$$

$$y = -4x + 20 + 1$$

$$y = -4x + 21$$

* C_f est dérivable à droite en $x_0 = 5$ et $f'_d(5) = \frac{1}{2}$

Donc f admet une demi-tangente à droite au point $B(5 ; 1)$.

$$y = f'_d(5)(x-5) + f(5)$$

$$y = \frac{1}{2}(x-5) + 1$$

$$y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2} + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

