

Introduction à la dérivation

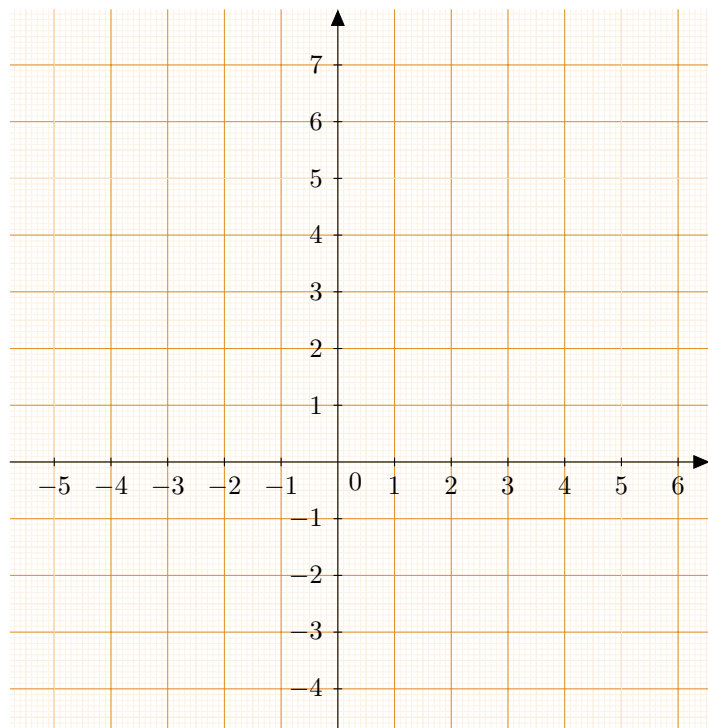
1. Notion de limite

A. Limite en un point

Exemple n°1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 1$.

La représenter graphiquement :



■ RAPPEL :

Soient a et b deux réels. Une fonction f définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, est appelée une

■ DÉFINITION :

a est appelée le
de la fonction affine f .

b est appelée
de la fonction affine f .

Exemple :

Ici

■ PROPRIÉTÉ :

La représentation graphique d'une fonction affine est

f est définie en $x_0 = 2$ et f est continue en $x_0 = 2$.

Donc, dans ce cas, la fonction **admet une limite** en $x_0 = 2$ et cette limite est

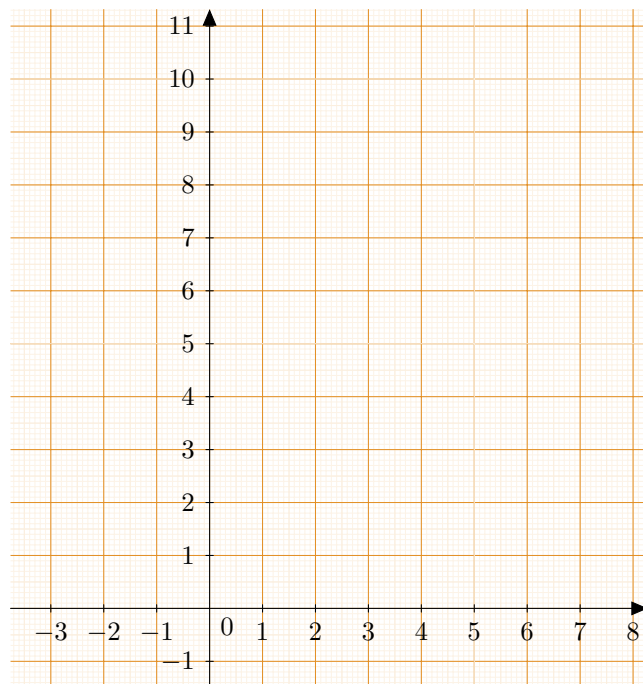
On écrit

Exemple n°2

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

par
$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x \in]-\infty ; 2[\\ x - 1 & \text{si } x \in]2 ; +\infty[\end{cases}$$

La représenter graphiquement.



■ RAPPEL :

On dit qu'une fonction f est **strictement croissante** sur l'intervalle I , si pour tous réels x_1 et x_2 de I ,

On dit qu'une fonction f est **strictement décroissante** sur l'intervalle I , si pour tous réels x_1 et x_2 de I ,

Exemple :

Ici, la fonction f est
sur $]-\infty ; 2[$ et
sur $]2 ; +\infty[$.



Attention

f n'est pas une fonction affine ! On dit que la fonction f est **affine par morceaux**.

f n'est pas définie en $x_0 = 2$, donc f n'est pas continue en $x_0 = 2$.

Dans cet exemple, la fonction **admet une limite** en $x_0 = 2$ et cette limite est

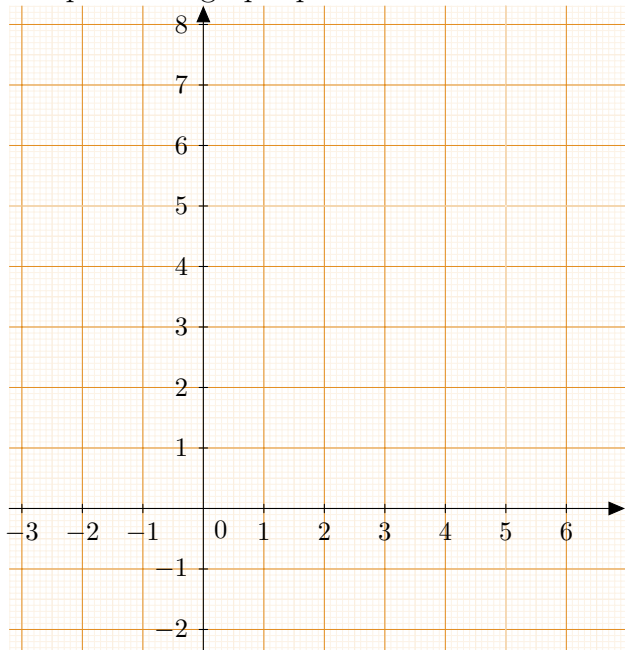
On écrit

Exemple n°3

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \in]-\infty ; 2[\\ x - 1 & \text{si } x \in]2 ; +\infty[\end{cases}$$

La représenter graphiquement.



f n'est pas définie en $x_0 = 2$, f n'est donc pas continue en $x_0 = 2$.

Dans cet exemple, la fonction f **n'admet pas une limite** en $x_0 = 2$.



Attention

Dans cet exemple, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ n'existe pas, donc on ne peut ni doit pas l'écrire !

Cependant :

- f admet une limite à gauche en $x_0 = 2$, notée

- f admet une limite à droite en $x_0 = 2$, notée

Remarque : Ici, -----

Néanmoins, si -----

, -----

alors on écrit -----

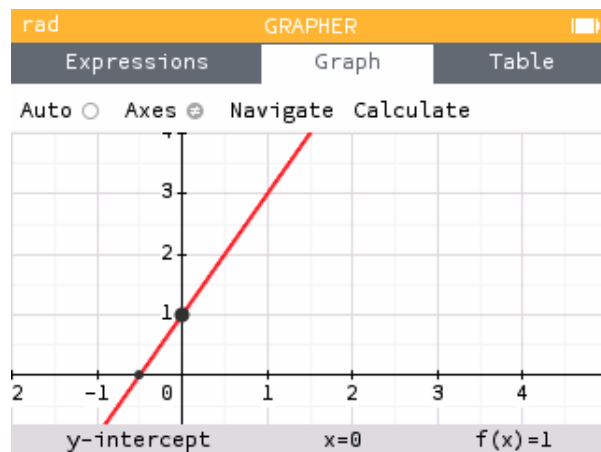
. -----

B. Exemple de calcul de limite

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$

On cherche la limite de f en $x_0 = 1$. On trace la fonction sur la calculatrice :



MÉTHODE : Tracer une fonction

- Aller dans l'onglet Grapher
- Ajouter un élément du type fonction
- Cliquer sur « Plot graph »
- Ajuster les axes au besoin en cliquant sur « Axes »

Grâce à la calculatrice, on **conjecture** que

Calculons cette limite :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - x - 1) = \text{-----}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = \text{-----}$$

Ceci est une **forme indéterminée** (du type « quotient de deux fonctions qui tendent vers 0 »).

Cependant, on peut factoriser le numérateur.

Ainsi :

$$\text{pour tout } x \neq 1, f(x) = \frac{(x - 1)(2x + 1)}{x - 1}$$

Ainsi pour tout $x \neq 1$, -----

On en conclut que

2. Nombre dérivé

A. Notion de taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soient x_0 et x_1 deux réels de I tels que $x_0 \neq x_1$.

■ DÉFINITION :

On appelle **taux de variation entre x_0 et x_1** , noté T , le réel

■ PROPRIÉTÉ : Autre expression

Pour x_0 et h deux réels tels que $h \neq 0$. Alors

Démonstration. Soient x_0 et h deux réels tels que $h \neq 0$. On pose On sait que

En remplaçant x_1 par sa valeur exprimée en fonction de h , on obtient

c'est-à-dire

□

B. Limite du taux de variation

■ PROPRIÉTÉ : Limite du taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soient x_0 et x_1 deux réels de I tels que $x_0 \neq x_1$. On note $T(h)$ le taux de variation de f en x_0 . On a deux cas :

- $\lim_{h \rightarrow 0} T(h)$ existe, est unique, et égale à un nombre fini. On dit alors que f est **dérivable en x_0** et

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = f'(x_0)$$

- $\lim_{h \rightarrow 0} T(h)$ n'existe pas ou est infinie. Alors f n'est pas dérivable en x_0 .

■ DÉFINITION :

Dans le premier cas, $f'(x_0)$ est appelé le **nombre dérivé** de f en x_0 .

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction définie sur I . On dit que f est **dérivable sur I** si, pour tout $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0 .

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2$$

Montrons que f est dérivable en $x_0 = 5$.

Pour tout $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} T(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(5 + h) - f(5)}{h} \\ &= \frac{(5 + h)^2 - 25}{h} \\ &= \frac{h^2 + 10h + 25 - 25}{h} \\ &= \frac{h^2 + 10h}{h} \\ &= \frac{h(h + 10)}{h} \\ &= h + 10 \text{ car } h \neq 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 10) = 10.$$

Donc f est dérivable en $x_0 = 5$ et $f'(5) = 10$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Montrons que f est dérivable en $x_0 = -4$.

Pour tout $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} T(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(-4 + h) - f(-4)}{h} \\ &= \frac{(-4 + h)^2 - 2(-4 + h) - 3 - (-16 + 8 - 3)}{h} \\ &= \frac{16 - 8h + h^2 + 8 - 2h - 3 - (-16 + 8 - 3)}{h} \\ &= \frac{16 - 8h + h^2 + 8 - 2h - 3 + 16 - 8 + 3}{h} \\ &= \frac{h^2 - 10h + 16 - 16 + 8 - 3 + 3}{h} \\ &= \frac{h^2 - 10h}{h} \\ &= h - 10 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = -10.$$

Donc f est dérivable en $x_0 = -4$ et

C. Interprétation graphique

■ DÉFINITION :

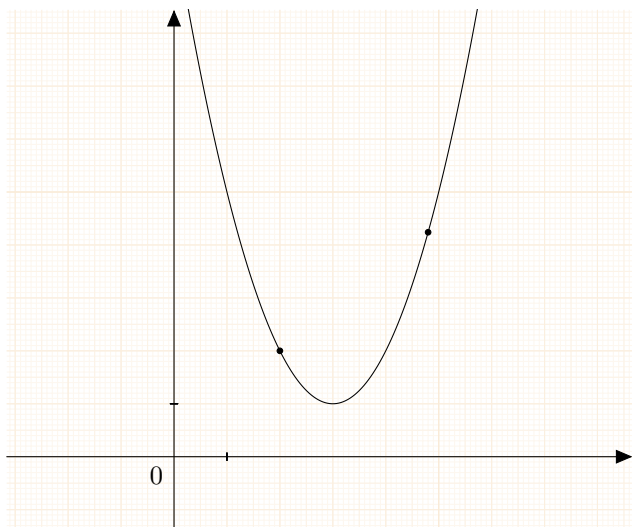
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant x_0 . On appelle **tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ en M_0 d'abscisse x_0** la droite passant par ce point et de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Le nombre dérivé en x_0 est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 .

■ PROPRIÉTÉ :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en tout point de I . Alors l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x_0 \in I$ est

Démonstration. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable en x_0 . Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère. Soit C_f la représentation graphique de f dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.



On considère le point $M_0(x_0 ; f(x_0)) \in C_f$

Pour $h \in \mathbb{R}$, on considère le point $M(x_0 + h ; f(x_0 + h)) \in C_f$

On note Δ la droite (M_0M) . Δ a pour équation réduite :

avec a et b deux réels. Déterminons a et b .

- a est le coefficient directeur de Δ . Ainsi

où

Donc Δ a pour équation

- On sait que $M_0 \in \Delta$, donc les coordonnées de M vérifient l'équation de Δ . Ainsi

c'est-à-dire

En remplaçant b par sa valeur dans l'équation de Δ , on obtient

ou encore

Quand h tend vers 0, le point M de C_f se rapproche de M_0 , et la sécante Δ à C_f devient la tangente Δ_0 à C_f au point M_0 .

Ainsi le coefficient directeur de Δ est

et donc

□



En allemand...

- der Grenzwert : la limite
- die Steigung : le coefficient directeur
- der y-Achsenabschnitt : l'ordonnée à l'origine
- die lineare Funktion : la fonction linéaire (ou, par abus de langage, la fonction affine)
- streng wachsend : strictement croissant
- streng fallend : strictement décroissant
- streng monoton : strictement monotone
- der Funktionsgraph : la représentation graphique de la fonction
- die Ableitung von f an der Stelle x_0 : la dérivée de f au point x_0
- ableitbar : dérivable
- die Grenzsekante : la tangente