



UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

PROJET DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

DOUBLE LICENCE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
SIXIÈME SEMESTRE

Groupes cristallographiques du plan

Auteurs :

DHÉNIN Sacha
NALIN Samuel

Professeur encadrant :

KELLER Bernhard

3 juin 2018

Résumé

« Voyez-vous les motifs représentés sur cette fenêtre ? Il s'agit d'un seul motif, mais répété plusieurs fois par l'action de symétries, de translations... Le groupe de ces isométries est un groupe cristallographique, appelé $p31m$. Il y en a 17 à conjugaison près ».

Ce document se veut être un résumé de la classification des isométries vectorielles et affines du plan, ainsi qu'une approche de la classification des groupes cristallographiques. On peut également accéder au site <http://samuel.nalin.org/cristal> pour trouver un utilitaire de découverte de ces 17 groupes cristallographiques.

Remerciements

Merci à Monsieur Bernhard Keller pour son accompagnement, sa patience et ses précieux conseils dans cette aventure d'algèbre et de géométrie.

Table des matières

Introduction	v
1 Classification des isométries du plan euclidien	1
1.1 Définitions et premières propriétés	1
1.2 Isométries vectorielles du plan	5
1.2.1 Généralités	5
1.2.2 Classification des isométries vectorielles du plan	7
1.3 Isométries affines du plan	10
1.3.1 Liste des isométries affines du plan	10
1.3.1.1 Translations	10
1.3.1.2 Symétries orthogonales par rapport à une droite	11
1.3.1.3 Symétries glissées	11
1.3.1.4 Rotations	12
1.3.2 Classification des isométries affines du plan	14
1.3.2.1 Argument de classification	14
1.3.2.2 Bilan	17
2 Une première approche des groupes cristallographiques par les cristaux géométriques	19
2.1 Groupes cristallographiques : définitions et premières propriétés	19
2.2 Sous-groupes finis de $\mathcal{O}(E)$	20
2.3 Classification des cristaux géométriques	23
3 Cristaux géométriques et cristaux arithmétiques	27
3.1 Introduction	27
3.1.1 Première approche	27
3.1.2 Seconde approche	28
3.1.3 Raffinage : cristaux arithmétiques	29
3.2 Exemple de distinctions possibles	30
3.2.1 Distinction entre pm et cm	30
3.2.2 Distinction entre $p3m1$ et $p31m$	31
3.3 Classification des cristaux arithmétiques	32
3.3.1 Introduction	32
3.3.2 Classification des cristaux arithmétiques	34

4	Cohomologie des groupes	37
4.1	Cohomologie en degré 1	37
4.1.1	Définitions	37
4.1.2	Interprétation	38
4.1.2.1	$H^1(\Gamma, L)$ et compléments	38
4.1.2.2	$H^1(\Gamma, E/L)$ et classes de translation de groupes cristallographiques	39
4.1.3	Propositions	39
4.1.4	Lien entre cohomologie et groupes cristallographiques	39
4.1.5	Calcul de cohomologies	42
A	Rappels d’algèbre linéaire et de théorie des groupes	43
A.1	Espace euclidien	43
A.2	Endomorphisme adjoint	46
A.3	Théorie des groupes	50
B	Arbre de décision	53

Introduction

On appelle *groupes cristallographiques* les groupes de symétries des dessins périodiques (dans deux directions) du plan. Ils sont omniprésents dans la vie quotidienne (cf motifs de papier peint), dans la mosaïque ou encore dans les travaux d'Escher¹.

À isomorphisme de groupes près, il n'existe que 17 groupes cristallographiques, et nous allons par la suite présenter des arguments de la classification de ces groupes.

1. Nous commencerons par classier les isométries vectorielles et affines du plan euclidien.
2. Nous étudierons ensuite les 10 cristaux géométriques, qui nous introduiront dans la classification.
3. Nous nous intéresserons ensuite aux 13 cristaux arithmétiques, pour progresser dans la classification.
4. Enfin, un calcul de cohomologie de degré 1 nous amènera à 18 groupes.

Au fur et à mesure de ce document, notre but sera donc toujours de se rapprocher du nombre de 17 groupes. Atteindre 17 nécessite d'étudier l'action sur la cohomologie en degré 1 du normalisateur du groupe ponctuel dans le groupe des isométries du réseau ; cet argument se trouve dans le document [Blu] (proposition 4.1).

1. Maurits Cornelis Escher est un artiste néerlandais, connu pour ses gravures sur bois, lithographies et manières noires inspirées des mathématiques.

Chapitre 1

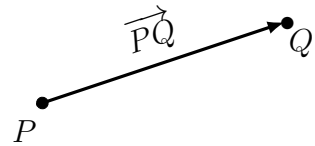
Classification des isométries du plan euclidien

On se place dans un plan affine euclidien, i.e. un plan affine \mathcal{E} tel que E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1. On définit une *distance* sur \mathcal{E} telle que

$$\forall (P, Q) \in \mathcal{E}^2, d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle}$$



Définition 1.2. Une fonction $f \in \mathcal{L}(E)$ est une *isométrie* si $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$. On note $\text{Isom}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de \mathcal{E} , c'est-à-dire :

$$\text{Isom}(\mathcal{E}) = \left\{ f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f \text{ est bijective et } \forall (P, Q) \in \mathcal{E}^2, d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) \right\}.$$

Proposition 1.3. $(\text{Isom}(\mathcal{E}), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}_{\mathcal{E}}, \circ)$.

Démonstration. • On a $\text{Id}_{\mathcal{E}} \in \text{Isom}(\mathcal{E})$, donc $\text{Isom}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$.

- Soit $(f, g) \in (\text{Isom}(\mathcal{E}))^2$.

Alors, par composée d'applications bijectives, $f \circ g$ est bijective et :

$$\begin{aligned} \forall (P, Q) \in \mathcal{E}^2, d((f \circ g)(P), (f \circ g)(Q)) &= d(f(g(P)), f(g(Q))) \\ &= d(g(P), g(Q)) \text{ car } f \in \text{Isom}(\mathcal{E}) \\ &= d(P, Q) \text{ car } g \in \text{Isom}(\mathcal{E}) \end{aligned}$$

Donc $f \circ g \in \text{Isom}(\mathcal{E})$.

- Soit $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$. En tant que réciproque d'application bijective, f^{-1} est bijective, et on a

$$\forall x \in E, \|x\| = \|f(f^{-1}(x))\| = \|f^{-1}(x)\|.$$

Donc $f^{-1} \in \text{Isom}(\mathcal{E})$.

□

Proposition 1.4. (voir [Blu]) Si $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$, alors f est une application affine, i.e. il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} : E \rightarrow E$ telle que

$$\forall P \in \mathcal{E}, \forall v \in E, f(P + v) = f(P) + \overrightarrow{f}(v). \quad (1.1)$$

Démonstration. Soit $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$. Soit $P \in \mathcal{E}$. L'application $\overrightarrow{f} : E \rightarrow E$ est définie par :

$$\forall v \in E, \overrightarrow{f}(v) = \overrightarrow{f(P) f(P + v)}$$

D'après cette définition, l'application \overrightarrow{f} est bien unique. Montrons maintenant que \overrightarrow{f} est bien linéaire.

Soit $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $P \in \mathcal{E}$. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(u + \lambda v) &= \overrightarrow{f(P) f(P + u + \lambda v)} \\ &= \overrightarrow{f(P) f(P + u)} + \overrightarrow{f(P + u) f(P + u + \lambda v)} \text{ par la relation de Chasles} \\ &= \overrightarrow{f(P) f(P + u)} + \lambda \overrightarrow{f(P + u) f(P + u + v)} \\ &= \overrightarrow{f(P) f(P + u)} + \lambda \overrightarrow{f(Q) f(Q + v)} \text{ en posant } Q = P + u \\ &= \overrightarrow{f}(u) + \lambda \overrightarrow{f}(v) \end{aligned}$$

Ainsi \overrightarrow{f} est bien linéaire, donc on a bien montré que \overrightarrow{f} est l'unique application linéaire qui satisfait les conditions données. \square

Lemme 1.5. La condition précédente est équivalente à

$$\forall (P, Q) \in \mathcal{E}^2, \overrightarrow{f(P) f(Q)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}). \quad (1.2)$$

Démonstration. (\implies) Soit $P \in \mathcal{E}$ et soit $v \in E$. Notons $Q \in \mathcal{E}$ le point tel que $Q = P + v$, i.e. $v = \overrightarrow{PQ}$.

Soit $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$. Supposons qu'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} : E \rightarrow E$ telle que (1.1). On a

$$\overrightarrow{f(P) f(Q)} = \overrightarrow{f(P) f(P + \overrightarrow{PQ})} \stackrel{(1.1)}{=} \overrightarrow{f(P) (f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}))} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ})$$

(\impliedby) Soit $(P, Q) \in \mathcal{E}^2$. Notons $v \in E$ le vecteur tel que $v = \overrightarrow{PQ}$.

Supposons qu'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} : E \rightarrow E$ telle que (1.2). Alors

$$\underbrace{\overrightarrow{f(P) f(P + \overrightarrow{PQ})}}_{(*)} = \overrightarrow{f(P) f(Q)} \stackrel{(1.2)}{=} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \underbrace{\overrightarrow{f(P) (f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}))}}_{(**)}$$

On peut donc identifier $(*)$ et $(**)$, pour obtenir : $f(P + \overrightarrow{PQ}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ})$.

On en conclut (1.1) en notant $v = \overrightarrow{PQ}$. \square

Notons $\vec{\cdot}$ l'application : $\text{Isom}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{O}(E) \subseteq \text{GL}(E)$
 $f \longmapsto \vec{f}$

Proposition 1.6. L'application $\vec{\cdot}$ est un morphisme de groupes bien défini.

Démonstration. • Montrons que $\vec{\cdot}$ est bien défini.

Soit $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$. Soit $P \in \mathcal{E}$. Supposons qu'il existe \vec{f}_1 et \vec{f}_2 deux isométries de E telles que, pour tout $v \in E$, $f(P+v) = P + \vec{f}_1(v) = P + \vec{f}_2(v)$.

Ainsi, par (1.2), on a pour tout $v \in E$, $\vec{f}_1(v) = \overrightarrow{P(P+v)}$ et $\vec{f}_2(v) = \overrightarrow{P(P+v)}$, i.e. $\vec{f}_1 = \vec{f}_2$.

• Montrons que $\vec{\cdot}$ est un morphisme de groupes pour la loi \circ . Soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{g \circ f(M) g \circ f(N)} &= \overrightarrow{g(f(M)) g(f(N))} \\ &= \vec{g} \left(\overrightarrow{f(M) f(N)} \right) \text{ car } g \text{ est affine} \\ &= \vec{g} \left(\vec{f} \left(\overrightarrow{MN} \right) \right) \text{ car } f \text{ est affine} \\ &= \vec{g} \circ \vec{f} \left(\overrightarrow{MN} \right) \end{aligned}$$

Or, \vec{g} et \vec{f} sont linéaires, donc $\vec{g} \circ \vec{f}$ est linéaire.

De plus, on a $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2$, $\overrightarrow{g \circ f(M) g \circ f(N)} = \vec{g} \circ \vec{f} \left(\overrightarrow{MN} \right)$.

Donc $g \circ f$ est affine et $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$. Ainsi $\vec{\cdot}$ est bien un morphisme de groupes. \square

Proposition 1.7. (voir [Abb17]) L'application $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ conserve les distances si et seulement si φ conserve le produit scalaire.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

(\implies) Supposons que φ conserve les distances, i.e. $\forall x \in E, \|\varphi(x)\| = \|x\|$.

Soit $(x, y) \in E^2$. D'après les identités remarquables du produit scalaire, on a :

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \text{ et } \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \frac{\|\varphi(x+y)\|^2 - \|\varphi(x-y)\|^2}{4}$$

Or, φ conserve les distances, donc $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} = \langle x, y \rangle$.

(\impliedby) Supposons que φ conserve le produit scalaire. Alors, en particulier,

$\forall v \in E, \langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle = \langle v, v \rangle$ i.e. $\|\varphi(v)\|^2 = \|v\|^2$, i.e. $\|\varphi(v)\| = \|v\|$. \square

Conséquence On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(E) &= \{ \varphi : E \longrightarrow E \mid \varphi \text{ est linéaire et } \forall v \in E, \|\varphi(v)\| = \|v\| \} \\ &= \{ \varphi : E \longrightarrow E \mid \varphi \text{ est linéaire et } \forall (u, v) \in E^2, \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle \} \end{aligned}$$

Proposition 1.8. (voir [Abb17]) Soit E un espace de dimension finie n . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) f une isométrie de E ;
- ii) f envoie toute base orthonormée de E sur une base orthonormée de E .

Démonstration. (i) \implies (ii) Si f est une isométrie, d'après 1.7, f conserve le produit scalaire. Ainsi, si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une orthonormée de E , alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_i^j$, où δ_i^j est le symbole de Kronecker¹. Donc $f(e)$ est orthonormée.

(i) \impliedby (ii) Soit e une base orthonormée telle que $f(e)$ soit aussi orthonormée (on sait qu'il existe au moins une base orthonormée). Ainsi, pour $x \in E$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ et $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$. Donc $\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2$. Ainsi f est une isométrie. □

Proposition 1.9. (voir [Abb17]) Soit E un espace de dimension finie n . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) f une isométrie de E ;
- ii) $f^* = f^{-1}$, où f^* désigne l'application adjointe de f .

Démonstration. (i) \implies (ii) Si f est une isométrie, d'après 1.3, f est un isomorphisme, et d'après 1.7, f^{-1} conserve le produit scalaire. Ainsi, pour $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{-1}(y) \rangle.$$

Or, cette relation caractérise l'adjoint, donc $f^* = f^{-1}$.

(i) \impliedby (ii) Réciproquement, soit f un endomorphisme de E tel que $f^* = f^{-1}$. Alors

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, f^* \circ f(x) \rangle = \langle x, f^{-1} \circ f(x) \rangle = \langle x, x \rangle$$

Donc, d'après 1.7, f est une isométrie. □

1. $\delta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

1.2 Isométries vectorielles du plan

1.2.1 Généralités

Proposition 1.10. (voir [Abb17]) Soit E un espace euclidien, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie de E . Alors les seules valeurs propres possibles de u sont ± 1 , et $\det u = \pm 1$.

Démonstration. Soit λ une valeur propre de u , et soit x un vecteur propre de u associé à λ . Alors $\|u(x)\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ par définition de $\|\cdot\|$, et $\|u(x)\| = \|x\|$ car u est une isométrie. Donc $|\lambda| \cdot \|x\| = \|x\|$, i.e. $|\lambda| = 1$, i.e. $\lambda = \pm 1$.

Soit e une base orthonormée de E , et soit M la matrice de u dans la base e . Comme u est une isométrie, on a $M \cdot {}^tM = I_n$, et puisque $\det {}^tM = \det M$, on en déduit $(\det M)^2 = 1$, et donc $\det u = \det M = \pm 1$. \square

Remarque 1.11. Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont appelés *points fixes* de l'isométrie.

Définition 1.12. Soit E un espace euclidien, et soit F un sous-espace vectoriel de E . Considérons la projection orthogonale sur F , que l'on notera p . La *symétrie orthogonale* par rapport à F est l'endomorphisme $s : E \rightarrow E$ défini par : $s(x) = 2p(x) - x$.

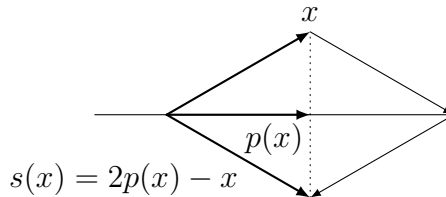


FIGURE 1.1 – Représentation de la symétrie orthogonale justifiant la définition.

Proposition 1.13. (voir [Abb17]) Soit E un espace euclidien, et soit F un sous-espace vectoriel de E . La symétrie orthogonale s par rapport à F :

- i) est une isométrie dont les points fixes sont les éléments de F ;
- ii) est une involution ;
- iii) est un endomorphisme auto-adjoint ;
- iv) a pour points fixes 1 et -1 ;

Démonstration. i) On a $s(x) = (p(x) - x) + p(x)$. Comme le montre la représentation graphique précédente, on a $p(x) - x \perp F$ et $p(x) \in F$. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|s(x)\|^2 = \|p(x) + (x - p(x))\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2.$$

Or, on a aussi $x \perp p(x)$, d'où

$$\|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x\|^2 - \|p(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

On a donc montré que $\|s(x)\|^2 = \|x\|^2$, et donc s est une isométrie.

De plus, si on considère $x \in E$ tel que $s(x) = x$, alors $p(x) = x$, et donc $x \in F$. Réciproquement, si $x \in F$, alors $p(x) = x$, et donc $s(x) = x$.

- ii) Puisque $x - p(x) \perp F$, et puisque $s(x) = \overbrace{p(x)}^{\in F} + \overbrace{(p(x) - x)}^{\in F^\perp}$, on en déduit que $p(s(x)) = 0$, et donc

$$s^2(x) = 2p(s(x)) - s(x) = 2p(x) - s(x) = 2p(x) - (2p(x) - x) = x.$$

- iii) Puisque s est une isométrie, d'après 1.9, on a $s^* = s^{-1}$, et d'après ii), on a $s^2 = \text{Id}_E$, i.e. $s^{-1} = s$. D'où $s^* = s$, et donc s est auto-adjoint.

- iv) Supposons $F \neq \{0\}$, alors, d'après i), s admet au moins un point fixe. Ainsi 1 est valeur propre de s par la remarque 1.11. De plus, si $F \neq E$, alors $F^\perp \neq \{0\}$, où $F^\perp = \{x \in E \mid x \perp F\}$. Donc pour au moins un vecteur $x \neq 0$, on a $s(x) = -x$, i.e. -1 est valeur propre de s . Donc si $\{0\} \subsetneq F \subsetneq E$, la symétrie orthogonale s a pour valeurs propres les deux valeurs possibles 1 et -1 . \square

Nous avons vu que les symétries orthogonales sont des isométries. Donc, par la propriété 1.3, la composition de symétries orthogonales est une isométrie. En fait, on a même le résultat suivant :

Proposition 1.14. (Décomposition des isométries comme produit de symétries orthogonales) (voir [Abb17]) Soit E un espace euclidien de dimension n , et soit f une isométrie de E . Alors f peut s'écrire comme un produit $f = s_k \circ \dots \circ s_1$ de symétries orthogonales par rapport à des hyperplans de E , avec $k \leq n$.

Pour montrer cela, on a besoin de deux lemmes :

Lemme 1.15. Soit E un espace euclidien, et soit x_1 et x_2 deux vecteurs distincts de même norme. Alors la symétrie orthogonale par rapport à $H = \{x \in E \mid x \perp x_1 - x_2\}$ échange x_1 et x_2 .

Démonstration. Notons $H = \{x \in E \mid x \perp x_1 - x_2\}$ et $H^\perp = \{x \in E \mid x \text{ est colinéaire à } x_1 - x_2\}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à H , et soit p la projection orthogonale sur H . Montrons que $x_1 + x_2 \in H$. D'après les identités remarquables A.3, on a $\langle x_1 + x_2, x_1 - x_2 \rangle = \|x_1\|^2 - \|x_2\|^2 = 0$. De plus $x_1 = \underbrace{\frac{x_1 + x_2}{2}}_{\in H} + \underbrace{\frac{x_1 - x_2}{2}}_{H^\perp}$, on en déduit que $p(x_1) = \frac{x_1 + x_2}{2}$,

et donc $s(x_1) = 2p(x_1) - x_1 = x_2$.

Enfin, comme s est une involution d'après ii) de 1.13, il vient que $s(x_2) = x_1$. \square

Lemme 1.16. Soit E un espace euclidien et soit f une isométrie de E . Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f (i.e. $f(F) \subseteq F$), alors $F^\perp = \{x \in E \mid x \perp F\}$ est aussi stable par f .

Démonstration. Soit $x \in F^\perp$, montrons que $f(x) \in F^\perp$. Pour $y \in F$, on a $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{-1}(y) \rangle$. Or, par hypothèse, $f(F) \subseteq F$ et f est une isométrie, donc en particulier un isomorphisme, donc $f(F) = F$ et $f^{-1}(F) = F$, d'où $f^{-1}(y) \in F$, et donc $\langle f(x), y \rangle = 0$. \square

Démonstration de la proposition 1.14. On va démontrer le résultat par récurrence sur la dimension de E . Si $n = 1$, le résultat est clair car $f(1) = \pm 1$ car f est une isométrie, donc f est ou bien l'identité ou bien la symétrie orthogonale par rapport à $\{0\}$, donnée par $f(x) = -x$.

Supposons que le résultat soit vrai pour tous les \mathbb{R} -espace vectoriels de dimension au plus $n - 1$, avec $n \geq 1$. Soit E de dimension n , et soit f une isométrie de E . Soit $x_1 \in E$, et posons $x_2 = f(x_1)$. Alors x_1 et x_2 ont la même norme, donc, d'après le lemme 1.15, il existe une symétrie orthogonale échangeant x_1 et x_2 . Notons s cette symétrie orthogonale. Posons $g = s \circ f$. Alors $g(x_1) = s(f(x_1)) = s(x_2) = x_1$, donc x_1 est un point fixe de g . Ainsi $\mathbb{R}x_1$ est stable par g . D'après le lemme 1.16, $(\mathbb{R}x_1)^\perp$ est aussi stable par g , et donc sa restriction g' à $(\mathbb{R}x_1)^\perp$ est une isométrie produit d'au plus $n - 1$ symétries orthogonales, i.e. $g' = s'_k \circ \dots \circ s'_1$, avec $k \leq n - 1$. Notons s'_i la symétrie orthogonale par rapport à un certain ensemble F'_i . Considérons la symétrie orthogonale s_i de E par rapport à $F_i = F'_i \oplus \mathbb{R}x_1$. Alors s_i prolonge s'_i à E tout entier, et laisse $\mathbb{R}x_1$ fixe. On en déduit que $g = s_k \circ \dots \circ s_1$, i.e. $f = s \circ s_k \circ \dots \circ s_1$.

1.2.2 Classification des isométries vectorielles du plan

En appliquant la propriété 1.14 à \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire usuel, on peut dire que les isométries de \mathbb{R}^2 sont produit de $k = 0, 1$ ou 2 symétries orthogonales par rapport à des droites vectorielles de \mathbb{R}^2 .

- Le cas $k = 0$ correspond à l'identité ;
- Le cas $k = 1$ correspond à une symétrie orthogonale par rapport à une droite ;
- Le cas $k = 2$ correspond à une rotation vectorielle, dont la définition est :

Définition 1.17. Soit E un plan euclidien. Une *rotation* est une isométrie de déterminant 1 dont la matrice dans au moins une base orthonormée de E est de la forme

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

pour un certain θ .

Démonstration. Montrons que, si r_θ a pour matrice $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée de E , alors r_θ est une isométrie :

$$\left\| r_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} \right\|^2 = (x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2 = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2$$

De plus, r_θ a pour déterminant 1, car $\det r_\theta = \det(M_\theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$. □

Pour classifier les isométries vectorielles, il convient d'abord d'énoncer le lemme suivant :

Lemme 1.18. Pour tout couple de réels (a, b) vérifiant $a^2 + b^2 = 1$, il existe un unique réel x de $]-\pi, \pi]$ tel que $a = \cos x$ et $b = \sin x$.

Démonstration. Soient a et b deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$.

— Montrons tout d'abord l'existence du réel x tel que $a = \cos x$ et $b = \sin x$.

On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2 \geq 0$. Ainsi, par stricte croissance de la fonction carrée, a et b sont nécessairement compris entre -1 et 1 .

- Supposons $a \geq 0$.

La fonction \cos est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

De plus, $\cos 0 = 1$ et $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\cos x = a$ (*).

Or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. On a alors $a^2 + b^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$, c'est-à-dire $\cos^2 x + b^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$, d'après (*).

Il vient $b^2 = \sin^2 x$, et donc $|b| = |\sin x|$, c'est-à-dire $b = \sin x$ ou $b = -\sin x$.

— Si $b = \sin x$, alors on a bien $a^2 + b^2 = 1$, et donc x convient.

— Si $b = -\sin x$, alors on a $\cos^2(-x) + \sin^2(-x) = 1$, et donc $-x$ convient.

Donc, si $a \geq 0$, il existe dans tous les cas un x tel que $a = \cos x$ et $b = \sin x$.

- Supposons $a < 0$. Un argument analogue en se plaçant sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ permet de conclure le résultat attendu.

— Montrons maintenant l'unicité du réel x tel que $\cos x = a$ et $\sin x = b$.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux réels distincts x_1 et x_2 de l'intervalle $[-\pi, \pi[$ tels que $\begin{cases} \cos x_1 = a \\ \sin x_1 = b \end{cases}$ et $\begin{cases} \cos x_2 = a \\ \sin x_2 = b \end{cases}$. Alors :

$$\begin{cases} \cos x_1 = \cos x_2 \\ \sin x_1 = \sin x_2 \end{cases}$$

Par suite, en résolvant les équations trigonométriques, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2 \\ x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = \pi - x_2 \end{cases}$$

On remarque que la seule solution au système est $x_1 = x_2$.

Il y a donc contradiction, car on a supposé x_1 distinct de x_2 .

On en conclut que $x_1 = x_2$, d'où l'unicité du réel $x \in [-\pi, \pi[$ tel que $\begin{cases} a = \cos x \\ b = \sin x \end{cases}$.

Ceci est vrai pour tout couple de réels (a, b) vérifiant $a^2 + b^2 = 1$.

On en conclut que pour tout couple de réels (a, b) vérifiant $a^2 + b^2 = 1$, il existe un unique réel x de $]-\pi, \pi]$ tel que $a = \cos x$ et $b = \sin x$. \square

On peut donc maintenant classifier les isométries vectorielles grâce à la caractéristique de la propriété 1.10 :

Théorème 1.19. (Classification des isométries d'un plan vectoriel euclidien)
(voir [Abb17]) Soit E un plan vectoriel euclidien et soit f une isométrie de E . Alors :

1. Si $\det f = 1$, alors f est une rotation et sa matrice dans toute base orthonormée est de la forme M_θ pour un certain θ .
2. Si $\det f = -1$, alors f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite de E .

Démonstration. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de f dans une base orthonormée. Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormée, donc les coefficients vérifient les équations : $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ et $ab + cd = 0$. Par le lemme 1.18, il existe $\alpha \in [0, 2\pi[$ et il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$, $c = \cos \alpha$ et $d = \sin \alpha$. La dernière équation devient $\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha = 0$, i.e. $\cos(\theta - \alpha) = 0$, donc $\theta = \alpha \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Examinons les deux cas possibles :

- Si $\alpha = \theta + \frac{\pi}{2} [2\pi]$, alors $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et alors $\det M = 1$;
- Si $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} [2\pi]$, alors $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ et alors $\det M = -1$;

Dans le premier cas, f est une rotation par la propriété 1.17. Dans le second cas, on peut dire que comme f est le produit de $k \leq 2$ symétries, et que le cas $k = 2$ est incompatible avec $\det M = -1$; f est donc nécessairement une symétrie orthogonale. \square

1.3 Isométries affines du plan

1.3.1 Liste des isométries affines du plan

1.3.1.1 Translations

Les translations affines t_v , où $v \in E$, sont définies par :

$$\begin{aligned} t_v : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ P &\longmapsto P + v \end{aligned}$$

Proposition 1.20. t_v est une isométrie de \mathcal{E} .

Démonstration. Soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$. On a $\overrightarrow{t_v(M)t_v(N)} = \overrightarrow{MN}$, i.e. $t_v(M)t_v(N) = MN$. Donc t_v préserve bien les distances, i.e. t_v est une isométrie. \square

Proposition 1.21. f est une translation si, et seulement si, $\vec{f} = \text{Id}_E$.

Démonstration. Soit $v \in E$.

(\implies) Soit $t_v : P \longmapsto P + v$ une translation de vecteur v .

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall P \in \mathcal{E}, \forall u \in E, t_v(P + u) &= P + u + v \\ &= P + v + u \\ &= t_v(P) + \text{Id}_E(u). \end{aligned}$$

(\impliedby) Soit $f \in \text{GA}(\mathcal{E})$ telle que $\vec{f} = \text{Id}_E$.

Soit $P_0 \in \mathcal{E}$ tel que $f(P_0) = P_0 + v$. Montrons que $f = t_v$.

$$\begin{aligned} \forall P \in \mathcal{E}, f(P) &= f\left(P_0 + \overrightarrow{P_0P}\right) \\ &= f(P_0) + \text{Id}_E\left(\overrightarrow{P_0P}\right) \\ &= P_0 + v + \overrightarrow{P_0P} \\ &= P + v \\ &= t_v(P). \end{aligned}$$

\square

On note $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ le sous-groupe des translations dans $\text{Isom}(\mathcal{E})$. Alors :

Proposition 1.22. (voir [Kel]) $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe distingué dans $\text{Isom}(\mathcal{E})$.

Démonstration. $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \text{Ker}(\vec{\cdot})$.

Or, $\vec{\cdot}$ est un morphisme de groupes d'après 1.6.

Donc, d'après la propriété A.36, $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ est distingué dans $\text{Isom}(\mathcal{E})$. \square

Proposition 1.23. Quel que soit $v \in E$, $f \circ t_v \circ f^{-1} = t_{\vec{f}(v)}$.

1.3.1.2 Symétries orthogonales par rapport à une droite

Soit $s_\Delta : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$
 $P \longmapsto s_\Delta(P)$

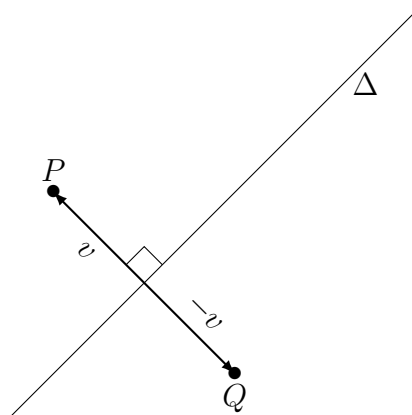


FIGURE 1.2 – Exemple de symétrie orthogonale

Alors $\overrightarrow{s_\Delta}$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\overrightarrow{\Delta}$.

Proposition 1.24. s_Δ est une isométrie de \mathcal{E} .

Démonstration. On considère $(M, N) \in \mathcal{E}^2$. Dans un repère orthonormé, les coordonnées de M et N sont (x_M, y_M) et (x_N, y_N) . Il vient que les coordonnées de $s_\Delta(M)$ et $s_\Delta(N)$ sont respectivement $(x_M, -y_M)$ et $(x_N, -y_N)$.

Alors $s_\Delta(M) s_\Delta(N) = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (-y_N + y_M)^2} = MN$. □

Proposition 1.25. Quels que soient $v \in E$ et $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$, $f \circ s_\Delta \circ f^{-1} = s_{\overrightarrow{f(\Delta)}}$.

1.3.1.3 Symétries glissées

Soit Δ une droite et v un vecteur de E .

Définition 1.26. Une *symétrie glissée* est la composée d'une symétrie s_Δ avec une translation de vecteur $v \in \overrightarrow{\Delta} \setminus \{0\}$.

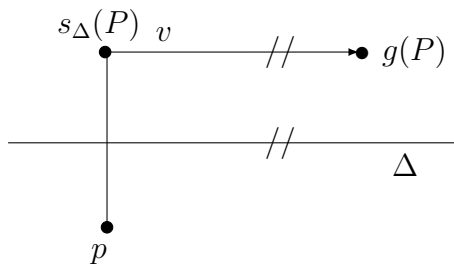


FIGURE 1.3 – Exemple de symétrie glissée

On note $g_{\Delta,v} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$
 $P \longmapsto Q = g_{\Delta,v}(P)$

Alors : $\overrightarrow{g_{\Delta,v}} = \overrightarrow{t_v} \circ \overrightarrow{s_{\Delta}} = \overrightarrow{t_v} \circ \overrightarrow{s_{\Delta}} = \overrightarrow{s_{\Delta}}$.

Proposition 1.27. $g_{\Delta,v}$ est une isométrie de \mathcal{E} .

Démonstration. $g_{\Delta,v}$ est la composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale. D'après 1.20 et 1.24, les translations et les symétries orthogonales sont des isométries, et d'après 1.3, la composée de deux isométries est une isométrie. Donc $g_{\Delta,v}$ est une isométrie. \square

Proposition 1.28. Pour tout $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$, on a $f \circ g_{\Delta,v} \circ f^{-1} = g_{f(\Delta),\vec{f}(v)}$.

1.3.1.4 Rotations

Soit $C \in \mathcal{E}$ et θ un angle. On considère la rotation $r_{C,\theta}$ de centre C et d'angle θ .

On a alors $\overrightarrow{r_{C,\theta}} = r_{\theta}$, où r_{θ} est la rotation vectorielle d'angle θ .

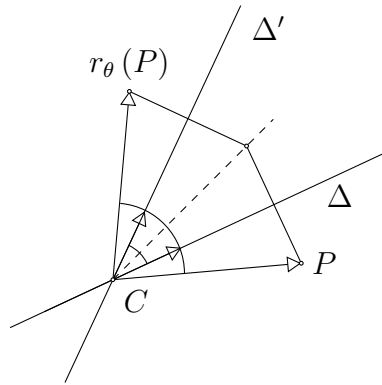


FIGURE 1.4 – Exemple de rotation

Remarque 1.29. On a orienté E pour pouvoir exprimer les mesures d'angles.

Proposition 1.30. $r_{C,\theta}$ est une isométrie de \mathcal{E} .

Démonstration. Soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$. Notons $M' = r_{C,\theta}(M)$ et $N' = r_{C,\theta}(N)$. On a $(\overrightarrow{CM'}, \overrightarrow{CN'}) = (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN})$, donc $\widehat{M'CN'} = \widehat{MCN}$. On applique ensuite le théorème d'Al-Kashi² dans les triangles CMN et $CM'N'$ pour obtenir :

$$M'N'^2 = CM'^2 + CN'^2 - 2CM'CN' \cos(\widehat{M'CN'}) = CM^2 + CN^2 - 2CMCN \cos(\widehat{MCN}) = MN^2. \quad \square$$

Proposition 1.31. Pour tout $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$, on a $f \circ r_{C,\theta} \circ f^{-1} = r_{f(C),\theta}$.

2. Al-Kashi est un mathématicien astronome perse (1380–1429).

Lemme 1.32. (voir [Per]) Soit f une application affine de E dans E . L'ensemble des points fixes de f est vide ou le sous-espace affine passant par un point fixe et de direction $\ker(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$.

Démonstration. Remarquons d'abord que $\ker(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs fixes par \vec{f} . Ainsi, $\ker(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$ est le sous-espace propre de \vec{f} associé à la valeur propre 1 si 1 est valeur propre de \vec{f} , et il est réduit au vecteur nul sinon.

S'il existe un point P de E fixe par f , montrons que l'ensemble X des points fixes de f est égal à $A = P + \ker(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$.

(\subseteq) Soit $Q \in A$. Alors on a $f(Q) = P + \vec{f}(\overrightarrow{PQ})$. Or, puisque P et Q sont dans A , on a $\overrightarrow{PQ} \in \vec{A}$, i.e. $\overrightarrow{PQ} \in \ker(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$. Ainsi le vecteur \overrightarrow{PQ} est fixe par \vec{f} et $f(P) = P$, i.e. $P \in X$.

(\supseteq) Soit Q un point de X . On a $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$ d'après 1.2, et comme $P \in X$ et $Q \in X$, $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{PQ}$. Ainsi $\vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PQ}$, donc $\overrightarrow{PQ} \in \ker(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$, et ainsi $Q = P + \overrightarrow{PQ} \in A$. □

Proposition 1.33. (voir [Per]) Soit $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i) \vec{f} n'admet pas la valeur propre 1 ;
- ii) f admet un unique point fixe.

Démonstration. Soit $f \in \text{GA}(\mathcal{E})$.

(\Leftarrow) Supposons que f admet un unique point fixe. Alors, d'après 1.32, l'ensemble de ses points fixes est un sous-espace affine de direction $\ker(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$, donc 1 n'est pas valeur propre de \vec{f} .

(\Rightarrow) Supposons que f n'admet pas la valeur propre 1.

(Existence) Soit $P \in E$. On cherche à montrer qu'il existe un point fixe X de f , i.e. un vecteur $X \in E$ tel que $f(X) = X$. On a les équivalences suivantes :

$$f(X) = X \iff f(P) + \vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = P + \overrightarrow{PX} \iff \overrightarrow{f(P)P} = (\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})(\overrightarrow{PX})$$

On va donc s'intéresser à $\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}}$. On a que E est de dimension finie et $\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}}$ est injective, donc $\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}}$ est également surjective. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{f(P)P}$ a un antécédent v par $\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}}$.

Notons $X = P + v$, i.e. $v = \overrightarrow{PQ}$. D'après les équivalences précédentes, X est donc bien un point fixe de f .

(Unicité) On a montré que f admet au moins un point fixe. Ainsi, d'après la propriété 1.32, l'ensemble de ses points fixes est un sous-espace affine de direction $\ker(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$. Or, $\ker(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}}) = \{0\}$ car $\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}}$ est injective, i.e. réduit à un point. D'où l'unicité du point fixe. □

Proposition 1.34. $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$ est une rotation d'angle non nul si, et seulement si \vec{f} est une rotation d'angle non nul.

Démonstration. Soit $f \in \text{Isom}(\mathcal{E})$.

(\implies) Évident, découle de la définition ;

(\impliedby) Soit f une isométrie du plan telle que sa partie linéaire est une rotation d'angle non nul, noté \vec{f} . Soit A la matrice de \vec{f} . D'après 1.17, $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

On étudie $A - I$, et on a $\det(A - I) = (\cos(\theta) - 1)^2 + \sin^2 \theta = 2(1 - \cos \theta)$. Ainsi, puisque θ est supposé non nul, $\det(A - I) \neq 0$, et donc $A - I$ est inversible.

Ainsi, d'après 1.33, \vec{f} n'admet pas la valeur propre, et donc f admet un unique point fixe que l'on notera C . Ainsi l'équation $f(P) = P$ admet une unique solution C , et on a

$$C = O - (A - I)^{-1} \theta.$$

Alors, pour un point $P \in \mathcal{E}$ quelconque, on note $P = C + u$, et on obtient :

$$f(P) = f(C) + A(P - C)$$

i.e.

$$f(C + u) = C + Au$$

Écrite sous cette forme, f est bien une rotation. □

Remarque 1.35. $\mathcal{O}(E) = \underbrace{\{\text{rotations}\}}_{\text{SO}(E)} \cup \underbrace{\{\text{symétries}\}}_{\text{pas un sous-groupe}} .$

1.3.2 Classification des isométries affines du plan

1.3.2.1 Argument de classification

Soit f une isométrie de \mathcal{E} . D'après 1.20, les translations sont des isométries. Ainsi, on peut considérer les transformations linéaires, et étudier les matrices, comme dans le théorème 1.19.

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors l'égalité ${}^tAA = I$ est équivalente à :
$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

D'après 1.18, on peut poser $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$, $c = \cos \alpha$ et $d = \sin \alpha$, et en étudiant les différentes possibilités comme dans la classification des isométries vectorielles, on obtient

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ ou bien } A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Étudions maintenant les différents cas engendrés.

- **Identité et translation** Si $\theta = 0 [2\pi]$, alors $A = I_2$. Ainsi, on a alors deux possibilités :
 - Soit $u = 0_E$, et alors f est l'identité ;
 - Soit $u \neq 0_E$, et alors f est telle que :

$$f(P) = P + u.$$

Ainsi, d'après 1.21, f est une translation, et l'équation $P + u = P$ n'a pas de solutions.

- **Rotation** Supposons que $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, où $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$. D'après la proposition 1.34, on peut en déduire directement que f est une rotation affine d'angle non nul.

- **Symétries et symétries glissées**

Considérons maintenant le cas où $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$. Dans ce cas, f peut admettre des points fixes et peut aussi ne pas en admettre, on va donc étudier les valeurs propres de A pour conclure. On a

$$\det(A - tI) = \det \begin{vmatrix} \cos(\theta) - t & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos(\theta) - t \end{vmatrix} = -\cos^2(\theta) + t^2 - \sin^2(\theta) = t^2 - 1$$

Les racines de $\det(A - tI)$ sont 1 et -1 , donc on peut en déduire que $v_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 1 et que $v_{-1} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre -1 .

Dans le cas affine, on a : $f(P) = AP + u$, alors l'équation $f(P) = P$ admet une solution si et seulement si $AP + u = P$, i.e. $(A - I)P = -u$, c'est-à-dire que f admet un point fixe si et seulement si $-u$ est dans l'image de la transformation $A - I$.

Par le théorème du rang (A.9), comme $\dim \ker(A - I) = 1$, on a $\text{rg}(A - I) = 1$.

On a ensuite le lemme suivant :

Lemme 1.36. Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet -1 pour valeur propre avec v_{-1} comme vecteur propre associé, alors l'image de $A - I$ contient v_{-1} .

Démonstration. On sait que l'image d'une transformation linéaire est un espace vectoriel, il suffit donc de trouver un vecteur v tel que $(A - I)v$ soit un multiple de v_{-1} . Si on prend $v = v_{-1}$, on obtient :

$$(A - I)v_{-1} = Av_{-1} - v_{-1} = -v_{-1} - v_{-1} = -2v_{-1}.$$

□

Dans ce cas, l'image est engendrée par v_{-1} car elle est de dimension 1. Alors, si $u = kv_{-1}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$\frac{k}{2}(A - I)v_{-1} = -u.$$

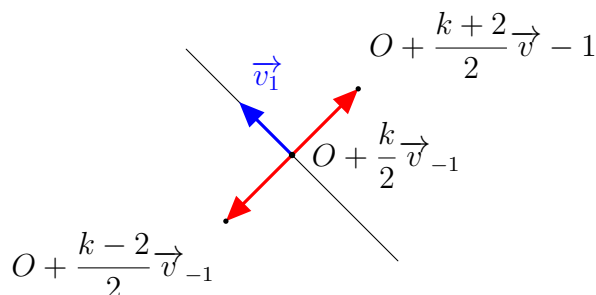
De plus, v_1 est dans le noyau de $A - I$ (par définition du vecteur propre associé à la valeur propre 1). Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f\left(O + \frac{k}{2}v_{-1} + tv_1\right) = O + A\left(\frac{k}{2}v_{-1} + tv_1\right) + kv_{-1} = O - \frac{k}{2}v_{-1} + tv_1 + kv_{-1} = O + \frac{k}{2}v_{-1} + tv_1$$

— Supposons que $u = kv_{-1}$, $k \in \mathbb{R}$. Montrons qu'alors f est une symétrie orthogonale par rapport à la droite $O + \frac{k}{2}v_{-1} + \mathbb{R}v_1$. En fait, il suffit de connaître l'image de trois points non alignés. L'égalité précédente montre que la droite $O + \frac{k}{2}v_{-1} + \mathbb{R}v_1$ est fixée par f . Choisissons deux des trois points sur cette droite, et calculons l'image d'un troisième point qui n'est pas sur cette droite, par exemple $P = O + \frac{k+2}{2}v_{-1}$:

$$f(P) = f\left(O + \frac{k+2}{2}v_{-1}\right) + Av_{-1} = O + \frac{k+2}{2}v_{-1} - v_{-1} = O + \frac{k-2}{2}v_{-1}.$$

Ainsi, comme le montre la représentation graphique suivante, $f(P)$ est bien l'image de P par la symétrie orthogonale.



— Supposons maintenant que u ne soit pas multiple de v_{-1} . On remarque que $\{v_1, v_{-1}\}$ forment une base orthonormale de \mathbb{R}^2 , il est donc possible d'écrire u comme combinaison linéaire de ces vecteurs. Pour cela, on va projeter le vecteur u sur les droites engendrées par v_1 et v_{-1} (on rappelle que le projeter du vecteur u sur un vecteur w quelconque est donnée par $\text{proj}_w u = \frac{\langle u, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w$).

La décomposition du vecteur u sur v_1 et v_{-1} donne :

$$u = \text{proj}_{v_{-1}} u + (u - \text{proj}_{v_{-1}} u) = \langle u, v_{-1} \rangle v_{-1} + (u - \text{proj}_{v_{-1}} u)$$

Or, $\{v_1, v_{-1}\}$ forment une base orthonormale, donc le terme $u - \text{proj}_{v_{-1}} u$ est colinéaire à v_1 . Enfin, par définition de f , on a $f(P) = AP + u$, qui devient alors

$$f(P) = O + AP + \langle u, v_{-1} \rangle v_{-1} + (u - \text{proj}_{v_{-1}} u)$$

En posant $l = O + \frac{\langle u, v_{-1} \rangle}{2} v_{-1} + \mathbb{R}v_1$, on observe que f est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite l (par un argument analogue à celui du point précédent) et d'une translation de vecteur $u - \text{proj}_{v_{-1}} u$, qui est parallèle à la droite l .

1.3.2.2 Bilan

Nous avons réussi à distinguer les grandes parties de la classification des isométries affines du plan euclidien par l'étude de leurs points fixes. Pour compléter, il convient d'ajouter un argument d'orientation.

On rappelle qu'une transformation linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *préserve l'orientation* de \mathbb{R}^2 si, étant donnée une paire $\{u, v\}$ de vecteurs linéairement indépendants et orientés positivement (i.e. dans le sens des aiguilles d'une montre), alors $f(u)$ et $f(v)$ le sont aussi. Sinon, on dit que f *renverse l'orientation*. La transformation f préserve l'orientation si et seulement si $\det A > 0$, où A est la matrice associée à f .

Prolongeons cette notion. On dira qu'un triplet $(u, v, w) \in E^3$ non colinéaires est *orienté positivement* si les vecteurs $v - u$ et $w - u$ sont orientés positivement (c'est-à-dire que le parcours de u vers v puis w se fait dans le sens inverse des aiguilles d'une montre).

Définition 1.37. Soit f une application affine de \mathbb{R}^2 . On dit que f *préserve l'orientation* si pour tout $(u, v, w) \in E^3$, $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ sont orientés positivement. Sinon, on dit que f *renverse l'orientation*.

Lemme 1.38. Soit f une application affine de \mathbb{R}^2 de partie linéaire \vec{f} . Alors f préserve l'orientation si, et seulement si, \vec{f} préserve l'orientation.

Démonstration. Soit $(u, v, w) \in E^3$ orientés positivement. Puisque f est affine, $f(v) - f(u) = \vec{f}(v - u)$ et $f(w) - f(u) = \vec{f}(w - u)$, ce qui suffit à conclure. \square

Corollaire 1.39. Soit $f = t_u \circ \tilde{f}$ une application affine de \mathbb{R}^2 , où t_u est une translation de vecteur u . Soit A la matrice associée à f . Alors f préserve l'orientation si et seulement si $\det A > 0$.

Théorème 1.40. (Classification des isométries affines du plan euclidien) Soit f une isométrie affine de \mathcal{E} . Alors ou bien f est l'identité, ou bien on a l'un des cas suivants :

- f préserve l'orientation :
 - f a au point un point fixe : alors f est une rotation ;
 - f n'a pas de point un point fixe : alors f est une translation ;
- f renverse l'orientation :
 - f a au point un point fixe : alors f est une symétrie ;
 - f n'a pas de point fixe : alors f est une symétrie glissée.

Chapitre 2

Une première approche des groupes cristallographiques par les cristaux géométriques

2.1 Groupes cristallographiques : définitions et premières propriétés

Définition 2.1. Un *réseau* est un sous-groupe $L \subseteq E$ tel que $L = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$, où $\{v_1, v_2\}$ est une base de E .

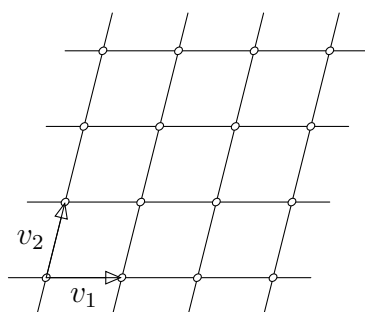


FIGURE 2.1 – Exemple de réseau

Définition 2.2. Un *groupe cristallographique* est un sous-groupe $G \subseteq \text{Isom}(\mathcal{E})$ tel que

$$\mathcal{T}(G) = \{t_v \mid t_v \in G\} = \{t_v \mid v \in L\}$$

pour un réseau $L \subseteq E$.

Exemple 2.3. Si $M \subseteq \mathcal{E}$ est un « motif périodique dans 2 directions indépendantes », alors

$$\text{Sym}(M) = \{g \in \text{Isom}(\mathcal{E}) \mid g(M) = M\}$$

est un groupe cristallographique.

2.2 Sous-groupes finis de $\mathcal{O}(E)$

Lemme 2.4. (voir [Blu]) Soit E un espace euclidien, et soit L un réseau de E . Alors tout ensemble borné de E contient un nombre fini de points de L .

Démonstration. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de L (i.e. une base de E qui engendre L).

Pour tout $x \in E$, notons $Q(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, où les x_i sont les coefficients de x sur les $(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Montrons que Q est une norme :

(Définie positive) Il est clair que, quel que soit $x \in E$, $Q(x)$ est positive.

On suppose $Q(x) = 0$. Alors $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0$, i.e. $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$.

Donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = 0$, et ainsi $x = 0$, ce que l'on voulait démontrer.

(Homogénéité) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } Q(\lambda x) &= \left(\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda^2 x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} && \text{par linéarité de la somme} \\ &= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda| Q(x) \end{aligned}$$

Ainsi Q est bien homogène.

(Inégalité triangulaire) On a :

$$\begin{aligned} Q(x+y)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i && \text{par linéarité de la somme} \\ &\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} && \text{par l'inégalité A.1} \\ &\leq Q(x)^2 + Q(y)^2 + 2Q(x)Q(y) \\ &\leq (Q(x) + Q(y))^2 \end{aligned}$$

Ainsi Q vérifie bien l'inégalité triangulaire.

On a donc montré que Q est une norme, et comme E est de dimension finie, Q est équivalente à la norme euclidienne sur E . Ainsi, toute partie bornée de E est bornée pour Q , donc il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in L \cap V$,

$$Q(x)^2 = \sum_{i=1}^n m_i^2 \leq r.$$

Mais les m_i sont entiers, d'où le résultat attendu. □

Proposition 2.5. (voir [Blu]) Si G est un groupe cristallographique, alors

$$\vec{G} = \{ \vec{f} \mid f \in G \} \subseteq \mathcal{O}(E)$$

est un sous-groupe fini.

Définition 2.6. \vec{G} est appelé le *groupe ponctuel* de G .

Démonstration. Soit L un réseau de E . On considère $\mathcal{O}(L)$ le groupe des automorphismes orthogonaux de E qui préservent L . Si B est une boule de centré en 0 et de rayon fini qui contient une base de L , on constate alors, puisque tout automorphisme orthogonal conserve la norme, qu'il y a un nombre fini de choix pour les images respectives des éléments de cette base (car ces images sont dans L et dans B , et $L \cap B$ est fini).

Ainsi, $\mathcal{O}(L)$ est borné, et d'après 2.4, $\mathcal{O}(L)$ est fini.

Enfin, puisque \vec{G} laisse stable un réseau L , il est contenu dans le groupe $\mathcal{O}(L)$, et puisqu'on a montré que $\mathcal{O}(L)$ est fini, on en conclut \vec{G} est fini. □

Définition 2.7. Le *groupe des rotations* C_n est un groupe cyclique formé de toutes les rotations autour d'un point fixe par des multiples de l'angle $\frac{360^\circ}{n}$.

Définition 2.8. On appelle *groupe diédral d'ordre n* , noté D_n pour $n \geq 2$ un groupe d'ordre $2n$ qui s'interprète comme le groupe des isométries du plan conservant un polygone régulier à n côtés. Le groupe est constitué de n éléments correspondant aux rotations et n autres correspondant aux réflexions.

Proposition 2.9. (voir [Mic91]) Les sous-groupes finis $\vec{G} \subseteq \mathcal{O}(E)$, à conjugaison près, sont les sous-groupes C_n , $n \geq 1$, et D_n , $n \geq 1$.

Démonstration. On rappelle que les éléments de $\mathcal{O}(E)$ sont des rotations ρ ou des symétries s .

- Supposons que tous les éléments de \vec{G} soient des rotations. Nous allons prouver qu'alors \vec{G} est cyclique (la preuve est similaire à celle de la détermination des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$).

— Si $\vec{G} = \{\text{Id}\}$, alors $\vec{G} = C_1$;

— Sinon \vec{G} contient une rotation ρ_θ non triviale. Notons θ le plus petit angle de rotations parmi les éléments de \vec{G} . Alors \vec{G} est généré par ρ_θ .

Soit $\rho_\alpha \in \vec{G}$ un élément de \vec{G} distinct de ρ_θ , où $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $n\theta$ le plus grand entier multiple de θ inférieur à α . Alors $\alpha = n\theta + \beta$, où $0 \leq \beta < \theta$.

Puisque G est un groupe et ρ_α et ρ_θ sont des éléments de G , alors $\rho_\beta = \rho_\alpha \rho_{-n\theta}$ est un élément de G . Or, on a supposé que θ est le plus petit angle de rotation de \vec{G} . Ainsi $\beta = 0$ et donc $\alpha = n\theta$. On a donc montré que \vec{G} est cyclique.

Enfin, si on suppose que $n\theta$ est le plus petit multiple de θ tel que $n\theta \geq 2\pi$, i.e. $2\pi \leq n\theta \leq 2\pi + \theta$. Puisque θ est le plus petit angle de rotation des éléments de \vec{G} , on a $n\theta = 2\pi$. Il vient $\theta = \frac{2\pi}{n}$, où $n \in \mathbb{N}$.

- Supposons que \vec{G} contienne au moins une symétrie, notée r' . On peut tourner le système de coordonnées de telle façon que ce soit la symétrie r par rapport à l'axe (Ox) . Notons H le sous-groupe des rotations de \vec{G} . On va montrer que $G = D_n$ par double inclusion.

(\supseteq) D'après le point précédent, H est un groupe cyclique tel que $H = C_n$, pour $n \geq 1$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les ρ_θ^i et $r\rho_\theta^i$ sont des éléments de \vec{G} , et donc \vec{G} contient le groupe diédral D_n .

(\subseteq) — Si $g \in \vec{G}$ une rotation. Alors $g \in H$ par définition de H . Alors $g \in D_n$.

— Si g est une symétrie, on peut l'écrire sous la forme $r\rho_\alpha$ pour une rotation $\rho_\alpha \in \vec{G}$. Puisque $r \in \vec{G}$ et $\rho_\alpha r r \in \vec{G}$, alors ρ_α est une puissance de ρ_θ , et donc $g \in D_n$.

On en conclut que $G = D_n$, pour $n \geq 1$.

□

2.3 Classification des cristaux géométriques

On s'intéresse maintenant aux sous-groupes finis de $\mathcal{O}(E)$, à conjugaison près, qui stabilisent un réseau :

Proposition 2.10. (Restriction cristallographique) (voir [Blu]) On a dix classes de conjugaison de sous-groupes finis de $\mathcal{O}(E)$ stabilisant un réseau :

- $\vec{G} = \{\text{Id}_E\}$ (i.e. si $G = \{t_v \mid v \in L\}$, où L est un réseau).
- Le groupe diédral D_1 (qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$).

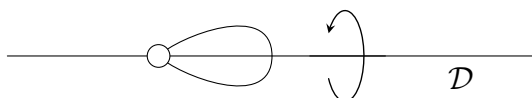


FIGURE 2.2 – Groupe diédral D_1 (stabilisant le monogone)

- Le groupe diédral D_2 qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

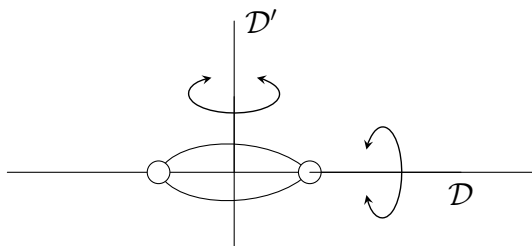


FIGURE 2.3 – Groupe diédral D_2 (stabilisant le digone)

- Le groupe diédral D_3 qui est isomorphe à \mathfrak{S}_3 .

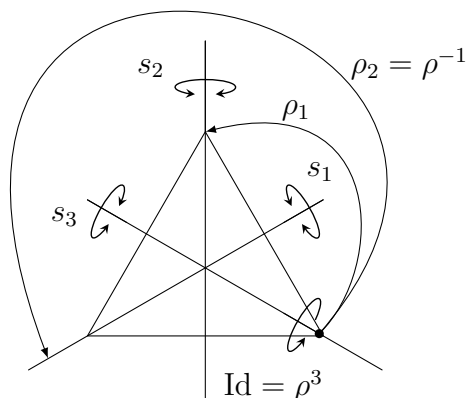


FIGURE 2.4 – Groupe diédral D_3 (stabilisant le triangle)

- Le groupe diédral D_4 .

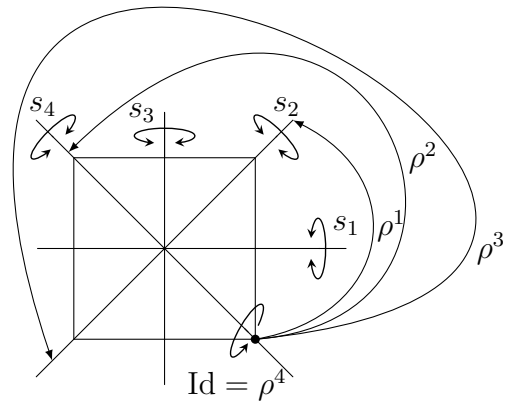


FIGURE 2.5 – Groupe diédral D_4 (stabilisant le carré)

- Le groupe diédral D_6 (stabilisant l'hexagone).
- Le groupe C_2 .

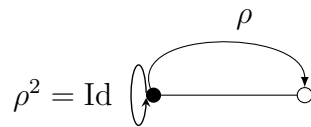


FIGURE 2.6 – Groupe C_2

- Le groupe C_3 .

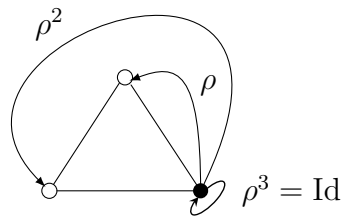


FIGURE 2.7 – Groupe C_3

- Le groupe C_4 .

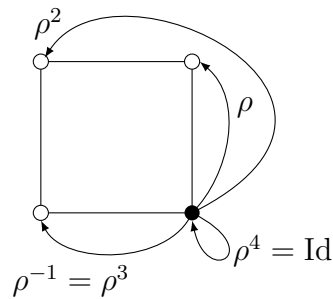


FIGURE 2.8 – Groupe C_4

- Le groupe C_6 .

Définition 2.11. Ces dix classes de conjugaison des sous-groupes finis de $\mathcal{O}(E)$ sont appelés *cristaux géométriques*.

Démonstration. Soit G un groupe cristallographique. D'après la propriété 2.9, \vec{G} est un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(E)$ égal à D_n ou C_n , pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, les groupes D_n et C_n contiennent une rotation d'angle $\theta = \frac{360}{n}$.

La matrice de cette rotation dans une base de E est donnée par $M_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

On considère maintenant une base du réseau. Par hypothèse, le réseau est laissé stable par la rotation, donc les vecteurs du réseau sont envoyés sur des vecteurs du réseau, i.e. sur des combinaisons linéaires entières de vecteurs de la base. Alors la matrice M_2 de la rotation dans une base du réseau fixée est $M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.

En particulier, on a $\text{Tr}(M_1) = 2 \cos \theta$ et $\text{Tr}(M_2) = a + d$, i.e. $\text{Tr}(M_2) \in \mathbb{Z}$.

On rappelle que la trace d'une matrice est invariante par changement de base.

Donc $\text{Tr}(M_1) = \text{Tr}(M_2)$, et ainsi $2 \cos \theta \in \mathbb{Z}$.

Soit $m \in \mathbb{Z}$. On pose $2 \cos \theta = m$.

Puisque $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, on a $-2 \leq m \leq 2$, i.e. $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Il vient :

m	-2	-1	0	1	2
$\cos \theta$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
θ	180°	$\pm 120^\circ$	$\pm 90^\circ$	$\pm 60^\circ$	360°
n	2	3	4	6	1

D'où $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Donc les sous-groupes finis $\vec{G} \subseteq \mathcal{O}(E)$ stabilisant le réseau sont, à conjugaison près, les sous-groupes C_n et D_n , pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. \square

Chapitre 3

Cristaux géométriques et cristaux arithmétiques

3.1 Introduction

Jusqu'à maintenant, on a considéré que les deux figures suivantes représentent le même groupe, ici $p4m$:

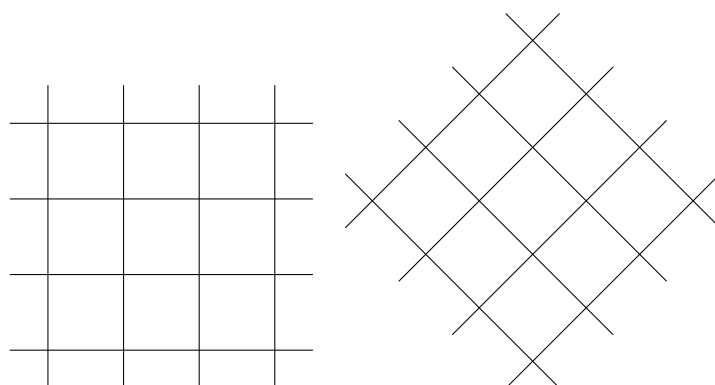


FIGURE 3.1 – Deux motifs de groupe $p4m$

Il est pourtant clair que, pour M un motif, le groupe $\text{Isom}(M)$ est différent dans les deux cas.

On souhaite classifier les groupes cristallographiques à une relation d'équivalence convenable près.

3.1.1 Première approche

Définition provisoire Si G_1 et G_2 sont deux groupes cristallographiques, on dira que $G_1 \sim G_2$ si G_1 et G_2 sont *conjugués* dans $\text{Isom}(\mathcal{E})$.

La représentation suivante montre que la définition précédente est insuffisante. En effet, on peut passer du premier groupe au second, il suffit de conjuguer chaque isométrie par une transformation affine dont la partie linéaire a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

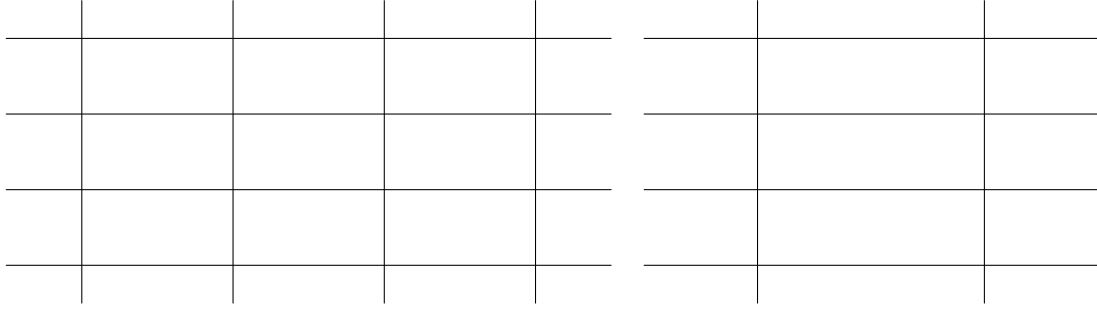


FIGURE 3.2 – Deux motifs de groupe pmm

3.1.2 Seconde approche

Définition 3.1. Soient G_1 et G_2 deux groupes cristallographiques de $\text{Isom}(\mathcal{E})$. On dit que G_1 et G_2 sont *équivalents* si

$$\exists g \in \text{GA}(\mathcal{E}), gG_1g^{-1} = G_2.$$

Théorème 3.2. (Bieberbach) Si G_1 et G_2 sont isomorphes en tant que groupes, alors ils sont équivalents.

On peut même dire : si $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ est un isomorphisme, alors il existe $g \in \text{GA}(\mathcal{E})$ tel que $\forall x \in G_1, \varphi(x) = gxg^{-1}$.

Démonstration. cf 4.10. □

À $G \subseteq \text{Isom}(\mathcal{E})$, on associe $\vec{G} \subseteq \mathcal{O}(E)$. Comme \vec{G} stabilise le réseau $L = \{v \in E \mid t_v \in G\}$, il est l'un des groupes $D_1, \dots, D_4, D_6, C_1, \dots, C_4, C_6$ à conjugaison dans $\mathcal{O}(E)$ près.

Si $G_1 \sim G_2$, on a $g \in \text{GA}(\mathcal{E})$ tel que $gG_1g^{-1} = G_2$. Cela entraîne que

$$\vec{g}\vec{G}_1\vec{g}^{-1} = \vec{G}_2$$

mais $\vec{g} \in \text{GL}(E)$ et non pas dans $\mathcal{O}(E)$.

Définition 3.3. (Rappel) On appelle *cristaux géométriques* les classes de conjugaison dans $\mathcal{O}(E)$ de sous-groupes laissant stable un réseau.

Théorème 3.4. (voir [Kel]) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(E)$ sont conjugués dans $\text{GL}(E)$, alors ils sont conjugués dans $\mathcal{O}(E)$.

Plus précisément, si $g \in \text{GL}(E)$ tel que $g\varphi g^{-1} = \psi$, alors :

$$g_o\varphi g_o^{-1} = \psi$$

où $g = g_o g_+$ est la décomposition polaire de $g \in \text{GL}(E)$.

Démonstration. Soit $g \in \text{GL}(E)$. On a $g = g_o g_+$, d'après la décomposition polaire de g . On va montrer que $g^* g \varphi = \varphi g^* g$. En effet :

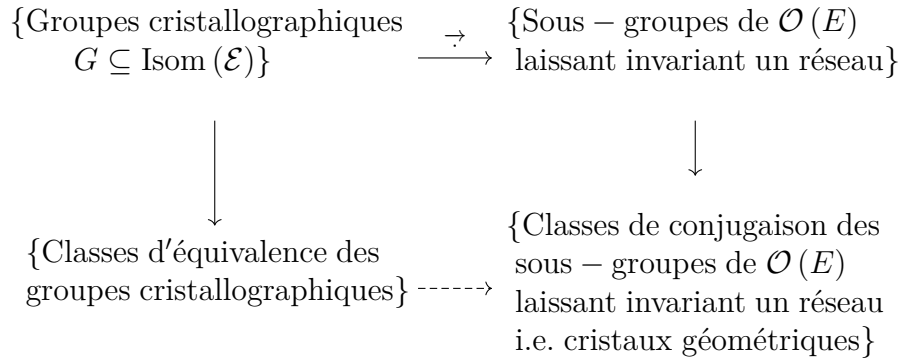
$$\begin{aligned}
 g^* g \varphi &= g^* \psi g && \text{par définition de } \varphi \text{ et } \psi \\
 &= g^* (\psi^{-1})^* g && \text{car } \psi^{-1} = \psi^* \\
 &= (\psi^{-1} g)^* g && \text{car } g \varphi^{-1} g^{-1} = \psi^{-1} \\
 &= (g \varphi^{-1})^* g \\
 &= \varphi^{-*} g^* g \\
 &= \varphi g^* g.
 \end{aligned}$$

Donc φ commute avec $g^* g$, et donc φ commute avec g_+ . D'où :

$$\begin{aligned}
 \psi &= g \varphi g^{-1} \\
 &= g_o g_+ \varphi g_+^{-1} g_o^{-1} \\
 &= g_o \varphi g_+ g_+^{-1} g_o^{-1} \\
 &= g_o \varphi g_o^{-1}.
 \end{aligned}$$

□

À l'issue de tout cela, on a la représentation suivante :



3.1.3 Raffinage : cristaux arithmétiques

Définition 3.5. Soit $G \subset \text{Isom}(\mathcal{E})$ un groupe cristallographique et soit $L = \{v \in E \mid t_v \in G\}$ son réseau des translations. On associe à G le couple (L, \overrightarrow{G}) tel que :

$$(L, \overrightarrow{G}) \in \{(\Lambda, \Gamma) \mid \Lambda \subseteq E \text{ un réseau et } \Gamma \in \text{GL}(E) \text{ un sous - groupe fini tel que } \forall \gamma \in \Gamma, \gamma(\Lambda) = \Lambda\}.$$

On dit que (Λ, Γ) est *équivalent* à (Λ', Γ') (noté $(\Lambda, \Gamma) \sim (\Lambda', \Gamma')$) s'il existe $g \in \text{GL}(E)$ tel que $\Lambda' = g\Lambda$ et $\Gamma' = g\Gamma g^{-1}$.

Définition 3.6. On appelle *cristal arithmétique* une classe d'équivalence de l'ensemble des couples (Λ, Γ) par la relation \sim précédente.

Proposition 3.7. On a une application bien définie :

$$\begin{aligned}
 \{\text{groupes cristallographiques}\} / \sim &\longrightarrow \{\text{cristaux arithmétiques}\} \\
 G &\longmapsto \text{classe de } (L, \overrightarrow{G})
 \end{aligned}$$

Lemme 3.8. On a une bijection canonique

$$\{\text{cristaux arithmétiques}\} \longrightarrow \{\text{classes de conjugaison de sous-groupes finis de } \text{GL}_2(\mathbb{Z})\}$$

$$\text{où } \text{GL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ tels que } ad - bc = \pm 1 \right\}$$

En effet, pour tout couple (Λ, Γ) , on peut choisir une base $\{v_1, v_2\}$ de L et on écrit les matrices des éléments de Γ dans cette base.

Proposition 3.9. Le cristal arithmétique de G détermine son cristal géométrique.

3.2 Exemple de distinctions possibles

3.2.1 Distinction entre pm et cm

On considère les groupes cristallographiques pm et cm . Chacun admet pour cristal géométrique le groupe D_1 . Montrons qu'ils n'admettent pas le même cristal arithmétique.

On considère une base v_1, v_2 du réseau des translations de pm et une base w_1, w_2 du réseau des translations de cm .

Dans le groupe pm , on a une symétrie qui vérifie $\vec{s}(v_1) = v_1$ et $\vec{s}(v_2) = -v_2$.

Donc s est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dans le groupe cm , on a une symétrie qui vérifie $\vec{s}(v_1) = v_1$ et $\vec{s}(v_2) = v_1 - v_2$.

Donc \vec{s} est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $\overrightarrow{pm} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ et $\overrightarrow{cm} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \text{GL}_2(\mathbb{Z})$.

On peut donc affirmer qu'il n'existe pas de $g \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ tel que

$$g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En effet, on a un homomorphisme de groupes $\rho : \text{GL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ vérifiant :

$$\rho \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \rho \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a que $\rho \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\rho \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$ ne sont pas conjugués, car la seule matrice conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en conclut que pm et cm n'ont pas le même cristal arithmétique.

3.2.2 Distinction entre $p3m1$ et $p31m$

$p3m1$ et $p31m$ ont le même groupe ponctuel D_3 , il convient donc de les distinguer par un autre argument que précédemment (où l'on pouvait énumérer tous les cas possibles). Il faut montrer que ces deux sous-groupes ne sont pas conjugués par un élément de $GL_2(\mathbb{Z})$.

Si l'on se contente de distinguer les groupes (pour montrer qu'ils ne sont pas isomorphes, par exemple), on peut regarder les classes de conjugaison de sous-groupes. Dans $p3m1$, on observe qu'il y a trois classes de conjugaison de sous-groupes de type D_3 , alors que dans $p31m$, il n'y a qu'une seule classe de conjugaison de sous-groupe de type D_3 .

Montrons maintenant que $p3m1$ et $p31m$ n'ont pas le même cristal arithmétique.

- Pour $p3m1$, on regarde les axes de symétrie : l'un a comme coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, un autre a comme coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le troisième a comme coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Parmi ces 3 vecteurs, il n'y en a pas deux qui forment une base du réseau des translations : $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 1$, $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 1$ et $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 1$.
- Pour $p31m$, on regarde également les axes de symétrie : l'un a comme coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, un autre a comme coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le troisième a comme coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Parmi ces trois vecteurs, deux quelconques de ces vecteurs forment une base du réseau des translations.

Or, cette caractéristique est déterminée par la classe de conjugaison. En effet, si on conjugue par $GL_2(\mathbb{Z})$, on va transformer un axe de symétrie en un axe de symétrie, le vecteur minimal (i.e. le vecteur générateur de l'axe de symétrie) dans le réseau reste le vecteur générateur dans l'image, et si les vecteurs engendrent le réseau avant la transformation, alors les vecteurs engendrent également le réseau après la transformation.

Cela permet de distinguer les classes de conjugaison dans $GL_2(\mathbb{Z})$, et ainsi de conclure que $p31m$ et $p3m1$ n'ont pas le même groupe arithmétique.

3.3 Classification des cristaux arithmétiques

3.3.1 Introduction

Rappel : Les cristaux arithmétiques sont les classes de conjugaison de sous-groupes finis de $GL_2(\mathbb{Z})$. Les cristaux géométriques sont les classes de conjugaison dans $\mathcal{O}(E)$ d'un sous-groupe fini stabilisant un réseau.

On veut obtenir le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Groupes cristallographiques } G\} / \sim & & \\ \downarrow \alpha & \searrow \gamma & \\ \{\text{Cristaux arithmétiques}\} & \xrightarrow{\beta} & \{\text{Cristaux géométriques}\} \end{array}$$

On cherche à définir β tel que $\beta \circ \alpha = \gamma$.

On considère $H \subseteq GL_2(\mathbb{Z})$ un sous-groupe fini. On rappelle que le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^2 est défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \langle hx, hy \rangle.$$

Proposition 3.10. Soit H un sous-groupe fini de $GL_2(\mathbb{Z})$. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ est un produit scalaire.
- $\forall h \in H, \langle hx, hy \rangle_H = \langle x, y \rangle_H$.

Démonstration.

- Montrons que $\langle x, y \rangle_H$ est un produit scalaire.

(Positivité) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

Par positivité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on a pour tout $h \in H, \langle hx, hy \rangle > 0$. D'où $\sum_{h \in H} \langle hx, hy \rangle > 0$.

Enfin, comme $|H| > 0$, on a $\frac{1}{|H|} > 0$, et donc $\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \langle hx, hy \rangle > 0$.

(Symétrie) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

On a $\langle x, y \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \langle hx, hy \rangle$.

Or, par symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on a $\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \langle hx, hy \rangle = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \langle hy, hx \rangle$.

Ainsi $\langle x, y \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \langle hy, hx \rangle = \langle y, x \rangle_H$.

(Bilinéarité) Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^2)^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } \langle x + \lambda y, z \rangle_H &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \langle h(x + \lambda y), hz \rangle \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \langle hx + \lambda hy, hz \rangle \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \langle hx, hz \rangle + \lambda \langle hy, hz \rangle && \text{par bilinéarité de } \langle \cdot, \cdot \rangle \\
&= \frac{1}{|H|} \left(\sum_{h \in H} \langle hx, hz \rangle + \lambda \sum_{h \in H} \langle hy, hz \rangle \right) && \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \langle hx, hz \rangle + \frac{\lambda}{|H|} \sum_{h \in H} \langle hy, hz \rangle \\
&= \langle x, z \rangle_H + \lambda \langle y, z \rangle_H
\end{aligned}$$

- Soit $h \in H$. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

Par définition, on a $\langle hx, hy \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h' \in H} \langle h'hx, h'hy \rangle$.

Or, comme on somme sur tous les éléments de $h' \in H$, le produit $h \times h'$ consiste en une permutation des éléments de H , donc $\frac{1}{|H|} \sum_{h' \in H} \langle h'hx, h'hy \rangle = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} \langle gx, gy \rangle$.

Ainsi $\langle hx, hy \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h' \in H} \langle h'hx, h'hy \rangle = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} \langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle_H$. □

Donc $H \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ est un sous-groupe stabilisant un réseau (à savoir \mathbb{Z}^2).

On choisit alors une base orthonormée $\{v_1, v_2\}$ de $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ et une base orthonormée $\{v'_1, v'_2\}$ de E . On définit :

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow E \\
v_1 &\longmapsto v'_1 \\
v_2 &\longmapsto v'_2
\end{aligned}$$

D'après la propriété 1.9, f est une isométrie.

On définit ensuite β par :

$$\beta(H) = fHf^{-1} \subseteq \mathcal{O}(E)$$

Alors $\beta(H)$ est un sous-groupe fini qui stabilise un réseau (à savoir $f(\mathbb{Z}^2)$).

Proposition 3.11. Si $H \subseteq \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ est conjugué à $H' \subseteq \text{GL}_2(\mathbb{Z})$, alors $\beta(H)$ est conjugué à $\beta(H')$ dans $\mathcal{O}(E)$.

Démonstration. H est conjugué à H' dans $\mathcal{O}(E)$, donc il existe g une isométrie telle que $H' = gHg^{-1}$.

De plus, par définition de β , on a : $\beta(H') = fH'f^{-1}$ et $\beta(H) = fHf^{-1}$ où f est l'application définie précédemment.

Ainsi $\beta(H') = fH'f^{-1} = fgHg^{-1}f^{-1}$. Par commutativité du produit :

$$\beta(H') = gfHf^{-1}g^{-1} = g\beta(H)g^{-1}.$$

Ainsi, on a bien prouvé qu'il existe g une isométrie telle que $\beta(H')$ et $\beta(H)$ sont conjugués dans $\mathcal{O}(E)$. \square

3.3.2 Classification des cristaux arithmétiques

La classification des cristaux arithmétiques est très longue, nous n'en donnerons ici qu'un aperçu. Pour un résultat complet, voir [Ive90] pages 33 *sqq.*

La classification des cristaux arithmétiques se base essentiellement sur le lemme suivant :

Lemme 3.12. (de Lagrange¹) (voir [Ive90]) Soit L un réseau de E . Soit $a \in L \setminus \{0\}$ tel que $|a|$ est minimal et soit $b \in L \setminus \mathbb{R}a$ tel que $|b|$ est minimum. Alors $|a, b|$ est générateur de L .

Théorème 3.13. (voir [Ive90] et [Kel])

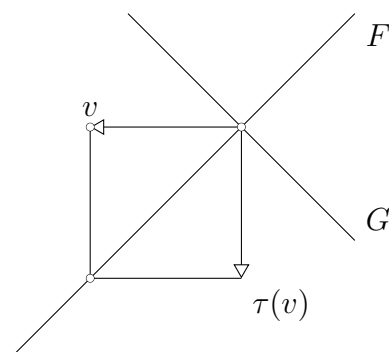
Le groupe $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ a exactement 13 classes de conjugaisons de sous-groupes finis :

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_1 \text{ et } D_{1*}, D_2 \text{ et } D_{2*}, D_3 \text{ et } D_{3*}, D_4, D_6.$$

Preuve du théorème 3.13 pour D_1 et D_{1}* On va montrer que l'on a bien deux sous-groupes de $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ reliés au cristal géométrique D_1 .

Soit $L \subseteq E$ un réseau dans un plan vectoriel euclidien. Soit $\tau : E \rightarrow E$ une symétrie par rapport à une droite telle que $\tau(L) = L$.

Soit $F = \text{Ker}(\tau - \text{Id}_E) \subseteq E$ et $G = \text{Ker}(\tau + \text{Id}_E) \subseteq E$.



Si $v \in L$, alors $v + \tau(v) \in F \cap L$ et $v - \tau(v) \in G \cap L$. Donc $F \cap L$ et $G \cap L$ contiennent des vecteurs non nuls et L .

1. Joseph Louis, comte de Lagrange (1736-1813), est un mathématicien piémontais naturalisé français.

Soit $s_1 \in F \cap L \setminus \{0\}$ de longueur minimale et $s_2 \in F \cap L \setminus \{0\}$ de longueur minimale. Pour $t \in L$, on a

$$\begin{aligned} t + \tau(t) &= m_t s_1 \\ t - \tau(t) &= n_t s_2 \end{aligned}$$

pour $m_t, n_t \in \mathbb{Z}$. Donc

$$t = \frac{m_t}{2} s_1 + \frac{n_t}{2} s_2.$$

Si pour tout $t \in L$, on a $m_t, n_t \in \mathbb{Z}$, alors $L = \mathbb{Z}s_1 + \mathbb{Z}s_2$ et $\{s_1, s_2\}$ forme une base de L .

Dans cette base, τ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Supposons que l'on a $t_0 \in L$ tel que $m_{t_0} \notin 2\mathbb{Z}$ (par exemple). Alors $n_{t_0} \notin 2\mathbb{Z}$. Donc m_{t_0} et n_{t_0} sont impairs en même temps. Alors

$$\frac{m_{t_0} + 2k}{2} s_1 + \frac{n_{t_0} + 2l}{2} s_2$$

appartient à L pour tout $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$.

Donc $t_1 = \frac{1}{2}(s_1 + s_2) \in L$ et $t_2 = \frac{1}{2}(s_1 - s_2) \in L$, et on a pour tout $t \in L$,

$$\begin{aligned} t &= \frac{m_t}{2} s_1 + \frac{n_t}{2} s_2 \\ &= \underbrace{\frac{m_t + n_t}{2}}_{\in \mathbb{Z}} t_1 + \underbrace{\frac{m_t - n_t}{2}}_{\in \mathbb{Z}} t_2 \end{aligned}$$

Donc $\{t_1, t_2\}$ est une base de L . Dans cette base, la matrice de τ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas conjuguées dans $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$. On a donc bien trouvé des classes différentes : la première correspondant à D_1 et la seconde correspondant à D_{1^*} .

Remarque 3.14. Notons que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est conjuguée dans $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ à $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En effet, si $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a bien $CAC^{-1} = B$.

Chapitre 4

Cohomologie des groupes

4.1 Cohomologie en degré 1

4.1.1 Définitions

Soit G un groupe. Soit D un groupe abélien muni d'une action de G par automorphismes.

Définition 4.1. Un 1-cocycle sur G à valeurs dans D est une application $s : G \rightarrow D$ telle que

$$\forall (\alpha, \beta) \in G^2, s(\alpha\beta) = s(\alpha) + \alpha s(\beta).$$

Définition 4.2. Soit $e \in D$. Le 1-cobord s_e associé à e est tel que :

$$\forall \alpha \in G, s_e(\alpha) = e - \alpha e.$$

Lemme 4.3. (voir [Kel]) Tout 1-cobord est un 1-cocycle.

Démonstration. Soit $e \in D$ et s_e le 1-cobord associé à e .

On a d'une part $s_e(\alpha\beta) = e - \alpha\beta e$.

D'autre part : $s_e(\alpha) + \alpha s_e(\beta) = e - \alpha e + \alpha(e - \beta e) = e - \alpha e + \alpha e - \alpha\beta e = e - \alpha\beta e$.

D'où $s_e(\alpha\beta) = s_e(\alpha) + \alpha s_e(\beta)$, et ceci pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$.

Donc s_e est un 1-cocycle. □

Définition 4.4. Le premier groupe de cohomologie $H^1(G, D)$ est tel que :

$$H^1(G, D) = \{1\text{-cocycles}\} / \{1\text{-cobords}\}.$$

4.1.2 Interprétation

4.1.2.1 $H^1(\Gamma, L)$ et compléments

On considère le produit semi-direct

$$G = L \rtimes \Gamma \cong t_L \cdot s_O(\Gamma) \subseteq \text{Isom}(\mathcal{E})$$

pour un choix $O \in \mathcal{E}$.

Définition 4.5. Tout sous-groupe $\Gamma' \subset L \rtimes \Gamma$ tel que l'application $g \in \Gamma' \mapsto \vec{g} \in \Gamma$ est un isomorphisme est appelé *complément* du réseau L dans G .

Proposition 4.6. On a une bijection entre l'ensemble des classes de translation par L de complément de L dans G et $H^1(\Gamma, L)$.

Démonstration.

- On considère Γ' tel que $\Gamma' \xrightarrow{\sim} \Gamma$. Pour $g \in \Gamma$, on note $s(g) \in \Gamma'$ pour l'unique élément $s(g) \in \Gamma'$ tel que $\vec{s(g)} = g$. On a donc

$$s(g) = t_{c(g)} \cdot s_O(g)$$

pour un unique $c(g) \in L$.

On a alors, d'une part : $s(g_1 g_2) = t_{c(g_1 g_2)} s_O(g_1 g_2)$ par définition, mais aussi :

$$\begin{aligned} s(g_1 g_2) &= s(g_1) s(g_2) \\ &= t_{c(g_1)} s_O(g_1) t_{c(g_2)} s_O(g_2) \\ &= t_{c(g_1)} s_O(g_1) t_{c(g_2)} \left(s_O(g_1)^{-1} s_O(g_1) \right) s_O(g_2) \\ &= t_{c(g_1)} \left(s_O(g_1) t_{c(g_2)} s_O(g_1)^{-1} \right) s_O(g_1) s_O(g_2) \\ &= t_{c(g_1)} t_{g_1 c(g_2)} s_O(g_1) s_O(g_2) && \text{car } f \circ t_v \circ f^{-1} = t_{\vec{f}(v)} \\ &= t_{c(g_1) + g_1 c(g_2)} s_O(g_1 g_2) \end{aligned}$$

Donc $c(g_1 g_2) = c(g_1) + g_1 c(g_2)$, et l'application $g \mapsto c(g)$ est un cocycle $\Gamma \rightarrow L$.

- On peut montrer que la classe de $c : \Gamma \rightarrow L$ ne dépend que de la classe de translation par L de Γ' .
- On considère maintenant l'application réciproque, en posant

$$\Gamma'_c = \left\{ t_{c(g)} \cdot s_O(g) \mid g \in \Gamma \right\} \xrightarrow{\sim} \Gamma.$$

On peut montrer que la classe de translation de Γ'_c ne dépend que de la classe de cohomologie de c .

□

4.1.2.2 $H^1(\Gamma, E/L)$ et classes de translation de groupes cristallographiques

Lemme 4.7. (voir [Ive90]) Si G est un groupe fini d'ordre N et $N \cdot : D \rightarrow D, x \mapsto N \cdot x$ une application bijective, alors $H^1(G, D) = \{0\}$.

Démonstration. Soit s un cocycle de G dans D . Alors :

$$\sum_{g \in G} s(g) = \sum_{g \in G} s(ag) = \sum_{g \in G} s(a) + as(g) = Ns(a) + \sum_{g \in G} s(g)$$

où $a \in G$. Si on note $k = \sum_{g \in G} s(g)$, on a l'égalité $Ns(a) = k - ak$.

Si $N \cdot$ est bijective et que l'on note $N^{-1} \cdot$ l'application réciproque de $N \cdot$, il vient

$$s(a) = (N^{-1}k) - a(N^{-1}k),$$

et ainsi s est un cobord. On en conclut que tout 1-cocycle est aussi un 1-cobord, et ainsi $H^1(G, D) = \{0\}$. \square

Γ agit sur E en laissant stable L , où $\Gamma \subseteq \mathcal{O}(E)$. On peut donc s'intéresser à trois groupes de cohomologie de degré 1 : $H^1(\Gamma, L)$, $H^1(\Gamma, E)$ et $H^1(\Gamma, E/L)$.

Or, on a $H^1(\Gamma, E) = \{0\}$ par le lemme 4.7. On verra à la section 4.1.4 qu'on a une bijection entre $H^1(\Gamma, E/L)$ et l'ensemble des classes de translation de groupes cristallographiques $G \subset \text{Isom}(\mathcal{E})$ de réseau L et de groupe ponctuel Γ .

4.1.3 Propositions

Proposition 4.8. (voir [Ive90]) Soit $G \in \text{Isom}(\mathcal{E})$ un groupe cristallographique. Soit $\mathcal{T} \subseteq G$ le sous-groupe des translations. Alors \mathcal{T} est le plus grand sous-groupe abélien distingué dans G .

Remarque 4.9. Si G_1, G_2 sont deux groupes cristallographiques de groupes des translations respectivement \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 , et si $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ est un isomorphisme de groupes, alors $\varphi(\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_2$.

Théorème 4.10. (Bieberbach) (voir [Ive90]) Soient G_1 et G_2 deux groupes cristallographiques. Si $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ est un isomorphisme, alors il existe $g \in \text{GA}(\mathcal{E})$ tel que

$$\forall x \in G_1, \varphi(x) = gxg^{-1}.$$

4.1.4 Lien entre cohomologie et groupes cristallographiques

Soient \mathcal{E} un plan affine euclidien et L un réseau de E . Dans toute cette partie, on notera $\pi : E \rightarrow E/L$ la projection canonique. Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{O}(E)$ un sous-groupe stabilisant L . On choisit une origine $O \in \mathcal{E}$. Alors on a un homomorphisme $s_O : \mathcal{O}(E) \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{E})$ tel que $\vec{\cdot} \circ s_O = \text{Id}$ défini par

$$s_O(g)(P) = O + g(\overrightarrow{OP}).$$

où $g \in \mathcal{O}(E)$ et $P \in \mathcal{E}$.

Pour un 1-cocycle $c : \Gamma \longrightarrow E/L$, on définit la partie G_c de $\text{Isom}(\mathcal{E})$ par :

$$G_c = \{t_v s_O(g) \mid \pi(v) = c(g), v \in E, g \in G\}.$$

Lemme 4.11. (voir [Kel])

- a) G_c est un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathcal{E})$. Le sous-groupe des translations de G_c est L et le groupe ponctuel de G_c est Γ .
- b) Soit $w \in E$ et b le cobord associé à $\pi(w)$, i.e. $b(g) = \pi(w) - g\pi(w)$ pour tout $g \in \Gamma$. Alors on a

$$G_{c+b} = t_w G_c t_w^{-1}.$$

- c) Réciproquement, supposons que pour un un cocycle c' il existe $w \in E$ tel que

$$G_{c'} = t_w G_c t_w^{-1}.$$

Alors on a $c' = c + b$, où b est le cobord associé à $\pi(w)$.

- d) Soit $G \subset \text{Isom}(\mathcal{E})$ un groupe cristallographique dont le réseau des translations est L et dont le groupe ponctuel est Γ . Alors il existe un cocycle c tel que $G = G_c$.

Les points a), b) et c) montrent que l'application $c \longmapsto G_c$ induit une application bien définie et injective de $H^1(\Gamma, E/L)$ vers l'ensemble des classes de translation par E de sous-groupes cristallographiques G de $\text{Isom}(\mathcal{E})$ dont le sous-groupe des translations est L et le groupe ponctuel Γ . De plus, le point d) montre que cette application est surjective. D'où le résultat suivant :

Corollaire 4.12. L'application $c \longmapsto G_c$ induit une bijection de $H^1(\Gamma, E/L)$ sur l'ensemble des groupes cristallographiques $G \subset \text{Isom}(\mathcal{E})$ de réseau L et de groupe ponctuel Γ .

Démonstration du lemme 4.11.

- a) La condition de cocycle implique que G_c est stable par multiplication. La condition de cocycle implique également que $c(g^{-1}) = -g^{-1}c(g)$ pour tout $g \in \Gamma$. Cette égalité montre donc que G_c est stable par passage à l'inverse. Donc G_c est bien un sous-groupe. Montrons maintenant que le sous-groupe des translations de G_c est égal à L . :

(\subseteq) La condition de cocycle donne

$$c(e) = c(ee) = c(e) + ec(e) = c(e) + c(e)$$

et donc $c(e) = 0$. Pour $v \in L$, on a

$$t_v = t_v s_O(e)$$

et cet élément appartient à G_c car $\pi(v) = 0 = c(e)$. D'où l'inclusion $L \subseteq G_c$.

- (\supseteq) Si on a $g \in \Gamma$ et $v \in E$ tel que $\pi(v) = c(g)$ et que $\overrightarrow{t_v s_O(g)} = \text{Id}$, alors $g = \overrightarrow{s_O(g)} = \overrightarrow{t_v s_O(g)} = \text{Id}$ et donc $\pi(v) = c(e) = 0$ ce qui signifie que $v \in L$.

Le sous-groupe des translations de G_c est donc bien L .

Enfin, comme on a

$$\overrightarrow{t_v s_O(g)} = \overrightarrow{s_O(g)} = g$$

pour $g \in \Gamma$, il est clair que le groupe ponctuel de G_c est Γ .

b) Montrons que $t_w G_c t_w^{-1} = G_{c+b}$.

(\subseteq) Par définition, les éléments de $t_w G_c t_w^{-1}$ sont de la forme $t_w t_v s_O(g) t_w^{-1}$, où $g \in \Gamma$ et $\pi(v) = c(g)$. Notons $\gamma = s_O(g)$. On a :

$$t_w t_v \gamma t_w^{-1} = t_w t_v \gamma t_{-w} \gamma^{-1} \gamma = t_{v+w} t_{-gw} \gamma = t_{v+w-gw} \gamma$$

et $\pi(v+w-gw) = \pi(v) + \pi(w) - g\pi(w) = c(g) + b(g)$. D'où $t_w G_c t_w^{-1} \subseteq G_{c+b}$.

(\supseteq) Réciproquement, les éléments de G_{c+b} sont de la forme $t_{v'} s_O(g)$, où $g \in \Gamma$ et

$$\pi(v') = c(g) + b(g) = c(g) + \pi(w) - g\pi(w).$$

Posons $v = v' - w - gw$. Alors on a

$$t_{v'} s_O(g) = t_{v+w-gw} \gamma = t_v t_w t_{-gw} \gamma = t_v t_w \gamma t_{-w} \gamma^{-1} \gamma = t_w t_v \gamma t_w^{-1},$$

ce qui montre que $G_{c+b} \subseteq t_w G_c t_w^{-1}$.

c) Soit $g \in \Gamma$ et $\gamma = s_O(g)$. Soit $v \in E$ tel que $\pi(v) = c(g)$. On a déjà vu que

$$t_w t_v \gamma t_w^{-1} = t_{v+w-gw} \gamma.$$

Par hypothèse, cet élément appartient à $G_{c'}$ et on a donc

$$c'(g) = \pi(v+w-gw) = \pi(v) + \pi(w) - g\pi(w) = c(g) + b(g).$$

Cela montre qu'on a bien $c' = c + b$.

d) Montrons que $G = G_c$.

(\subseteq) Soit $\gamma \in G$ et $g = \overrightarrow{\gamma}$. On a $\overrightarrow{\gamma} = g = \overrightarrow{s_O(g)}$ et il existe donc une translation t_v telle que $\gamma = t_v s_O(g)$. On pose $c(g) = \pi(v)$. Pour deux éléments γ_1 et γ_2 de parties linéaires g_1 et g_2 , il existe des $v_i \in E$ tels que $\gamma_i = t_{v_i} s_O(g_i)$, $i = 1, 2$. Pour $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$ de partie linéaire $g = g_1 g_2$, on a $v \in E$ tel que $\gamma = t_v s_O(g)$. On a

$$\gamma_1 \gamma_2 = t_{v_1} s_O(g_1) t_{v_2} s_O(g_2) = t_{v_1} t_{g_1 v_2} s_O(g_1 g_2) = t_{v_1 + g_1 v_2} s_O(g) = t_v s_O(g).$$

Donc $v = v_1 + g_1 v_2$ et

$$c(g_1 g_2) = \pi(v) = \pi(v_1) + \pi(g_1 v_2) = c(g_1) + g_1 \pi(v_2) = c(g_1) + g_1 c(g_2)$$

ce qui est la condition de cocycle. Par construction, on a $G \subseteq G_c$.

(\supseteq) Réciproquement, supposons que l'on a un élément $t_v s_O(g)$ de G_c , c'est-à-dire que $\pi(v) = c(g)$. Alors il existe un élément $\gamma \in G$ tel que $\overrightarrow{\gamma} = g$ et on a $\gamma = t_{v'} s_O(g)$ pour un $v' \in E$. Par définition, on a $\pi(v') = c(g)$. Or on a $c(g) = \pi(v)$. Donc $v = v' + l$ pour un élément $l \in L$. On trouve que

$$t_v s_O(g) = t_{v'+l} s_O(g) = t_l t_{v'} s_O(g) = t_l \gamma.$$

Donc l'élément $t_v s_O(g)$ appartient bien à G et on a $G_c \subseteq G$.

□

4.1.5 Calcul de cohomologies

Proposition 4.13.

Γ	$H^1(\Gamma, E/L)$	$ H^1(\Gamma, E/L) $
C_1	0	1
C_2	0	1
C_3	0	1
C_4	0	1
C_6	0	1
D_1	$\mathbb{Z}/2$	2
D_{1^*}	0	1
D_2	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	4
D_{2^*}	0	1
D_3	0	1
D_{3^*}	0	1
D_4	$\mathbb{Z}/2$	2
D_6	0	1
13	×	18

Annexe A

Rappels d'algèbre linéaire et de théorie des groupes

A.1 Espace euclidien

Définition A.1. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un *produit scalaire* sur E si :

1. (Symétrie) $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
2. (Bilinéarité) $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$.
3. (Positivité) $\forall x \in E, \begin{cases} \langle x, x \rangle \geq 0 \\ \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \end{cases}$.

Définition A.2. On appelle *espace euclidien* un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Lemme A.3. On a les identités remarquables suivantes :

- $\forall (x, y) \in E^2, \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$.
- $\forall (x, y) \in E^2, \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$.
- $\forall (x, y) \in E^2, \langle x + y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle$.

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} \langle x + y, x + y \rangle &= \langle x + y, x \rangle + \langle x + y, y \rangle \text{ par linéarité à droite} \\ &= \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \text{ par linéarité à gauche} \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \text{ par symétrie} \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x - y, x - y \rangle &= \langle x - y, x \rangle - \langle x - y, y \rangle \text{ par linéarité à droite} \\ &= \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \text{ par linéarité à gauche} \\ &= \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \text{ par symétrie} \\ &= \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x + y, x - y \rangle &= \langle x + y, x \rangle - \langle x + y, y \rangle \text{ par linéarité à droite} \\
&= \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle \text{ par linéarité à gauche} \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle \text{ par symétrie} \\
&= \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle
\end{aligned}$$

□

On cherche ensuite à définir la notion de « longueur » d'un vecteur d'un espace euclidien, qu'on appelle la norme d'un vecteur, à partir du produit scalaire que l'on a considéré. Pour cela, on va utiliser le résultat suivant :

Proposition A.4. (Inégalité de Cauchy¹-Schwarz²) Soit E un espace euclidien. Alors pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a :

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \quad (\text{A.1})$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in E$.

- Supposons $y = 0$.
Alors $\langle x, 0 \rangle = \langle x, 0 \cdot 0 \rangle = 0 \cdot \langle x, 0 \rangle = 0$.
De plus, $\langle x, x \rangle \langle 0, 0 \rangle = 0$, par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positif.
Donc l'inégalité A.1 est vrai (on a même égalité).
- Supposons $y \neq 0$. On considère la fonction $f : t \mapsto f(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle$.
On a clairement que $f(t) \geq 0$ (*), par positivité du produit scalaire.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \langle x + ty, x + ty \rangle \\
&= \langle x + ty, x \rangle + t \langle x + ty, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + t \langle y, x \rangle + t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + t \langle x, y \rangle + t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle
\end{aligned}$$

On a supposé $y \neq 0$, donc $t^2 \langle y, y \rangle \neq 0$. Donc f est bien une fonction polynôme de degré 2. On calcule son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle = 4 \left(\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \right).$$

Or, d'après (*), f ne change pas de signe. On en déduit que son discriminant est négatif. Ainsi $\Delta < 0$, i.e. $4 \left(\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \right) < 0$, i.e. $\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle < 0$, i.e. $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$, ce qu'on voulait démontrer.

Cas d'égalité : Puisqu'on a supposé $y \neq 0$, x et y sont liés si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$. Si c'est le cas, un calcul analogue au développement de $f(t)$ nous donne l'égalité attendue.

Réciproquement, s'il y a égalité dans (A.1), alors le discriminant de $f(t)$ est nul, i.e. $f(t)$ admet une racine, i.e. il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0$. On obtient $\langle x + t_0 y, x + t_0 y \rangle = 0$, et par positivité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $x + t_0 y = 0$, donc x et y sont liés.

□

1. Augustin Louis, baron Cauchy (1789-1857) est un mathématicien français.
2. Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) est un mathématicien allemand.

La notion intuitive de longueur d'un vecteur est donc donnée mathématiquement par la notion de norme, définie par :

Définition A.5. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Une fonction $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée *norme* sur E si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. (Positivité) $\forall x \in E, \begin{cases} \langle x, x \rangle \geq 0 \\ \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \end{cases}$.
2. (Homogénéité) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
3. (Inégalité triangulaire) $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Théorème A.6. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E . Alors la fonction $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E .

Démonstration. On vérifie les trois points de la définition du produit scalaire :

- (Positivité) La positivité de $\|\cdot\|$ est une conséquence directe de la positivité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- (Homogénéité) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle = \lambda^2 \|x\|^2.$$

Ainsi, en passant aux racines carrées, on obtient bien $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

- (Inégalité triangulaire) Soit $(x, y) \in E^2$.
On veut vérifier que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, donc $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$.
En développant par les identités remarquables A.3, on obtient :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \text{ d'après l'inégalité A.1} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

□

Définition A.7. Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$.

Définition A.8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Un système $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ est *orthonormé* si, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2, i \neq j$, on a $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ et tous les vecteurs x_i sont de norme 1.

En particulier, une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E est *orthonormée* si, et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_i^j$$

où $\delta_i^j = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Théorème A.9. (Théorème du rang) Soient E et F deux espaces vectoriels (de dimension finie ou infinie) sur un corps K et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\text{rg } f + \dim \ker f = \dim E,$$

où $\text{rg } f$ désigne la dimension de l'image de f .

A.2 Endomorphisme adjoint

Soit E est un espace vectoriel euclidien. Soit $f : E \longrightarrow E$.

Proposition A.10. Il existe un unique endomorphisme $g : E \longrightarrow E$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.$$

Définition A.11. L'application g de la proposition précédente est appelée *application adjointe*, on la note f^* . Ainsi $f^* : E \longrightarrow E$ est l'unique endomorphisme tel que :

$$\forall v, w \in E, \langle v, f^*(w) \rangle = \langle f(v), w \rangle.$$

Lemme A.12. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Alors tout vecteur $x \in E$ admet la décomposition suivante dans la base e :

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

En particulier, si $M = (M_{i,j})$ est la matrice dans la base e de f , alors :

$$M_{i,j} = \langle e_i, f(e_j) \rangle \tag{A.2}$$

Démonstration. Puisque e est une base, il existe une famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. En effectuant le produit scalaire avec un vecteur e_j de la base, et en utilisant

que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_i^j$, on obtient $\langle x, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_j \right\rangle = \lambda_j \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_j \rangle = \lambda_j$.

Ainsi, on a bien $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.

La relation (A.2) en découle, car le j ème vecteur colonne $(M_{i,j})_i$ collecte les coordonnées dans la base e de l'image du vecteur de la base $f(e_j)$. \square

Proposition A.13. Supposons que A soit la matrice de f dans une base orthonormée. Alors ${}^t A$ est la matrice de f^* dans cette même base.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . On suppose que A est la matrice de f dans e , et on note A' la matrice de f^* dans e . Montrons que $A' = {}^t A$.

$$\begin{aligned} \text{On a } A'_{i,j} &= \langle f^*(e_i), e_j \rangle \text{ d'après le lemme A.12} \\ &= \langle e_i, f(e_j) \rangle \text{ par définition de } f^* \\ &= A_{j,i}. \end{aligned}$$

On a donc montré que A et A' sont transposées l'une de l'autre. \square

Définition A.14. Un endomorphisme $u : E \longrightarrow E$ est *auto-adjoint* si $u^* = u$.

Définition A.15. Un endomorphisme $u : E \longrightarrow E$ est *symétrique* si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Proposition A.16. Si f est auto-adjoint, alors f est symétrique.

Démonstration. Si f est auto-adjoint, on a $f^* = f$, et donc, par définition de f^* :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

Donc f est symétrique. □

Proposition A.17. Si f est symétrique, alors f^{-1} est symétrique.

Démonstration. f est symétrique, donc par hypothèse

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

Soit $(x, y) \in E^2$. On a :

$$\begin{aligned} \langle f^{-1}(x), y \rangle &= \langle f^{-1}(x), f(f^{-1}(y)) \rangle \\ &= \langle f^{-1}(x), f(f^{-1}(y)) \rangle \\ &= \langle f(f^{-1}(x)), f^{-1}(y) \rangle \text{ car } f \text{ est symétrique} \\ &= \langle x, f^{-1}(y) \rangle \end{aligned}$$

Donc f^{-1} est symétrique. □

Définition A.18. Un endomorphisme symétrique $u : E \rightarrow E$ est dit *positif* si :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0.$$

De plus, on dit que u est *défini positif* si u est positif et $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0 \implies x = 0$.

Proposition A.19. Si f est un endomorphisme de E défini positif, toutes ses valeurs propres sont des réels strictement positifs.

Démonstration. Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme symétrique. On suppose que f est défini positif. Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé. On a donc

$$\langle f(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

Ainsi $\lambda = \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2}$. Or, comme f est défini positif, $\langle f(x), x \rangle > 0$, et donc λ est strictement positif. □

Définition A.20. Un endomorphisme $u : E \rightarrow E$ est *orthogonal* si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Lemme A.21. Si u est orthogonal, alors u^{-1} est orthogonal.

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$. Supposons u orthogonal.

Alors $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, i.e. $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u(u^{-1}(x)), u(u^{-1}(y)) \rangle$.

Alors $\langle x, y \rangle = \langle u^{-1}(x), u^{-1}(y) \rangle$, donc u^{-1} est orthogonal. □

Proposition A.22. Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme.

La propriété précédente est équivalente $f^*f = \text{Id}_E$, i.e. à $f^* = f^{-1}$.

Démonstration. On va montrer que f est orthogonal si et seulement si f^{-1} est l'adjoint de f , i.e.

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \iff f^* = f^{-1}.$$

(\implies) Supposons que f est orthogonal, i.e. $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, et montrons qu'alors $f^* = f^{-1}$.

D'après la propriété A.21, f^{-1} est orthogonal. Ainsi, pour $(x, y) \in E^2$, on obtient, en composant à gauche par f^{-1} :

$$\langle x, f(y) \rangle = \langle f^{-1}(x), y \rangle.$$

Or, cette relation caractérise l'adjoint de f . Donc $f^{-1} = f^*$.

(\impliedby) Supposons $f^{-1} = f^*$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(x) \rangle &= \langle x, f^* \circ f(y) \rangle \text{ par caractérisation de l'adjoint} \\ &= \langle x, f^{-1} \circ f(y) \rangle \text{ par hypothèse} \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Donc f est orthogonal. □

Théorème A.23. (voir [Kel]) Soit $f \in \text{GL}(E)$. Alors il existe une unique décomposition

$$f = f_o f_+$$

où f_o est orthogonale et f_+ est symétrique et définie positive ; on l'appelle la décomposition polaire.

En outre, si $g \in \text{GL}(E)$ commute avec f^*f , alors g commute avec f_+ .

Démonstration. (Existence) On considère f^*f . On a :

$$(f^*f)^* = f^* f^{**} = f^*f.$$

Donc d'après la propriété A.16, f^*f est symétrique. De plus, on a

$$\forall v \in E \setminus \{0\}, \langle v, f^*f(v) \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle > 0$$

Donc par définition, f^*f est défini positif.

Or, d'après la propriété A.19, f^*f est diagonalisable avec des valeurs propres strictement positives. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres (deux à deux distinctes) de f^*f . On note E_{λ_i} l'espace propre de la valeur propre λ_i , pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$; alors $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}$.

Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. On définit $f_+ = \sqrt{f^*f}$ par $\forall v \in E_{\lambda_i}, f_+(v) = \sqrt{\lambda_i} \cdot v$. Puisque f est symétrique, il est clair que f_+ est symétrique. Ainsi, d'après A.17, f_+^{-1} est symétrique.

Puisqu'on veut $f = f_o f_+$, on définit $f_o = f f_+^{-1}$. Montrons que f_o est orthogonale.

$$\begin{aligned} \text{On a } f_o^* f_o &= (f f_+^{-1})^* f f_+^{-1} \\ &= f_+^{-*} f^* f f_+^{-1} \\ &= f_+^{-*} (f^* f) f_+^{-1} \text{ par associativité de la composition} \end{aligned}$$

Or, $f^* f$ est f_+ sont diagonales dans une même base. Donc ces deux applications commutent. Ainsi :

$$\begin{aligned} f_o^* f_o &= f_+^{-*} f_+^{-1} f^* f \\ &= f_+^{-1} f_+^{-1} f^* f \text{ car } f_+^{-1} \text{ est symétrique} \\ &= (f_+^2)^{-1} f^* f \\ &= (f^* f)^{-1} (f^* f) \text{ par définition de } f_+ \\ &= \text{Id}_E \end{aligned}$$

Donc d'après la propriété A.22, on a f_o est orthogonal.

Supposons maintenant que $g \in \text{GL}(E)$ commute avec $f^* f$ et montrons que g commute avec f_+ .

Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Alors, si $v \in E_{\lambda_i}$, on a :

$$\begin{aligned} (f^* f) g(v) &= g(f^* f(v)) \text{ car } g \text{ commute avec } f^* f \\ &= g(\lambda_i v) \text{ car } v \text{ est vecteur propre pour la valeur propre } \lambda_i \\ &= \lambda_i g(v) \text{ par linéarité.} \end{aligned}$$

Donc $(f^* f) g(v) = \lambda_i g(v)$. Ainsi $g(E_{\lambda_i}) \subseteq E_{\lambda_i}$.

Pour montrer que $f_+ \circ g = g \circ f_+$ sur E , comme $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}$, il suffit de montrer que $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \forall v \in E_{\lambda_i}, f_+ \circ g(v) = g \circ f_+(v)$.

Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et soit $v \in E_{\lambda_i}$. On a $f_+ \circ g(v) = \sqrt{\lambda_i} \cdot g(v)$ car $g(v) \in E_{\lambda_i}$ et $g \circ f_+(v) = g(\sqrt{\lambda_i} \cdot v)$ car $v \in E_{\lambda_i}$. On en conclut l'égalité $f_+ \circ g(v) = g \circ f_+(v)$ par linéarité de g .

(Unicité) Supposons que $f = f_o f_+ = f'_o f'_+$ pour un f'_o orthogonal et un f'_+ symétrique et défini positif.

$$\begin{aligned} f^* f &= (f'_o f'_+)^* f'_o f'_+ \\ &= f'_+{}^* f'_o{}^* f'_o f'_+ \\ &= f'_+{}^* f'_+ \text{ car } f \in \mathcal{O}(E) \\ &= f'_+ f'_+ \text{ car } f'_+ \text{ est symétrique} \\ &= f'^2_+ \end{aligned}$$

Soit $s \in \mathbb{N}^*$. f'_+ est diagonalisable de valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$, donc f'^2_+ est diagonalisable de valeurs propres $\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_s^2$.

Or, $f'^2_+ = f^* f$, donc $\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_s^2$ sont exactement les valeurs propres de $f^* f$, i.e. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.

Ainsi $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ sont les $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_r}$.

On a $E_{\mu_i}(f'_+) = E_{\mu_i^2}(f'^2_+) = E_{\lambda_j}(f^* f)$. Donc f'_+ a les mêmes valeurs propres avec les mêmes espaces propres que f_+ . D'où l'unicité de la décomposition polaire. \square

Corollaire A.24. Si $\phi, \psi \in \mathcal{O}(E)$ et $g \in \text{GL}(E)$ tel que $g\phi g^{-1} = \psi$, alors $g_0\phi g_0^{-1} = \psi$, où $g = g_0 g_+$ est la décomposition polaire.

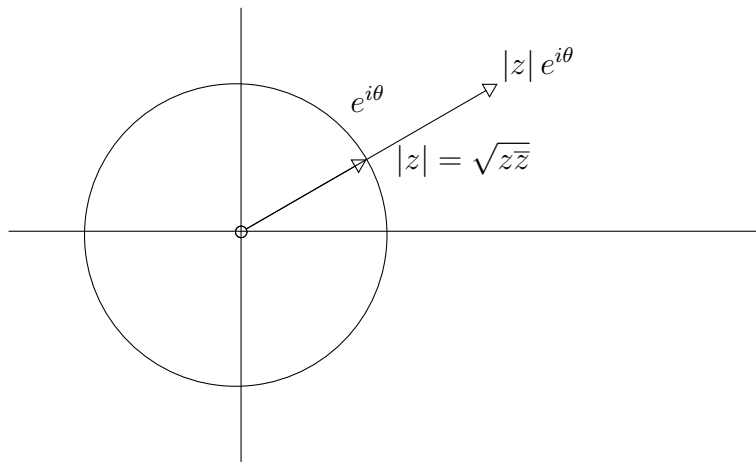


FIGURE A.1 – Représentation polaire d'un nombre complexe

A.3 Théorie des groupes

Définition A.25. Soit (G, \top) un magma. On dit que (G, \top) est un *groupe* si :

- La loi \top est associative ;
- G admet un élément neutre e pour la loi \top ;
- Tout élément de G admet un symétrique.

Si \top est commutative, on parle de groupe commutatif ou abélien.

Si G est fini, on parle de groupe fini.

Définition A.26. Soit G un groupe fini. Le cardinal de G est appelé *ordre du groupe* G .

Définition A.27. Soient (G, \top) et (G', \top') deux groupes. Soit $f \in G \longrightarrow G'$. On dit que f est un *morphisme* du groupe (G, \top) dans le groupe (G', \top') si :

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x \top y) = f(x) \top' f(y).$$

Définition A.28. Soit f un morphisme d'un groupe (G, \top) dans un groupe (G', \top') . On appelle *noyau* de f l'ensemble : $\text{Ker } f = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$, où e' est l'élément neutre de (G', \top') .

Définition A.29. Soient G et G' deux groupes. Soit $f \in G \longrightarrow G'$. Si f est bijective, on dit que f est un *isomorphisme* de groupes.

Définition A.30. Soient G et G' deux groupes. On dit que G et G' sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de G dans G' .

Définition A.31. Soit (G, \top) un groupe. Soit H une partie de G .

On dit que H est un *sous-groupe* de (G, \top) si :

- H est stable pour la loi \top ;
- (H, \top) est un groupe.

Proposition A.32. Soit (G, \cdot) un groupe. Soit H une partie de G . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) H est un sous-groupe de G

$$(ii) \begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in H^2, x \cdot y \in H \\ \forall x \in H, x^{-1} \in H \end{cases}$$

Proposition A.33. Soient (G, \top) et (G', \top') deux groupes. Soit f un morphisme de (G, \top) dans (G', \top') . Soit H' un sous-groupe de (G', \top') . Alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de (G, \top) .

Démonstration. Montrons par le point (ii) de la proposition A.32 que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G .

Il est clair que $f^{-1}(H') \subseteq H$. Notons e et e' les éléments neutres respectifs de (G, \top) et (G', \top') . f est un morphisme donc $f(e) = f(e \top e) = f(e) \top' f(e)$, donc par régularité, $f(e) = e'$. Or, $e' \in H'$. Donc $f(e) \in H'$, ou encore $e \in f^{-1}(H')$. Ainsi $f^{-1}(H') \neq \emptyset$.

Soit $(x, y) \in (f^{-1}(H'))^2$. On a donc $f(x) \in H'$ et $f(y) \in H'$. Ainsi $f(x) \top' f(y) \in H'$ car H' est un sous-groupe de (G', \top') . Or, $f(x) \top' f(y) = f(x \top y)$ car f est un morphisme. Donc $f(x \top y) \in H'$, i.e. $x \top y \in f^{-1}(H')$.

Enfin, soit $x \in f^{-1}(H')$. Alors $f(x) \in H'$, donc si on note $\overline{\top}^{-1}A$ l'inverse de A pour \top , on a $\overline{\top}^{-1}f(x) \in H'$, car H' est un sous-groupe de (G', \top') . Ainsi $\overline{\top}^{-1}f(x) \in H'$, i.e. $f\left(\overline{\top}^{-1}x\right) \in H'$ car f est un morphisme de groupes. Donc $\overline{\top}^{-1}x \in f^{-1}(H')$.

On en conclut que $f^{-1}(H')$ est bien un sous-groupe de (G, \top) . □

Définition A.34. Soit (G, \top) un groupe. Soit H un sous-groupe de G .

On dit que H est un *sous-groupe distingué* dans G si :

$$\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H.$$

Proposition A.35. Soient (G, \top) et (G', \top') deux groupes. Soit f un morphisme de (G, \top) dans (G', \top') . Soit H' un sous-groupe distingué de (G', \top') . Alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe distingué de (G, \top) .

Démonstration. D'après la proposition A.33, $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de (G, \top) . Soient $g \in G$ et $h \in f^{-1}(H')$. Alors $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1})$, car f est un morphisme. On a naturellement $f(g) \in H'$ et $f\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \top \\ g \end{smallmatrix}\right) \in H'$. De plus, puisque H' est distingué dans G' , on a $f(h) \in H'$. Donc $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) \in H'$, i.e $ghg^{-1} \in f^{-1}(H')$. On en conclut que $f^{-1}(H')$ est distingué dans G . \square

Théorème A.36. Soit f un morphisme d'un groupe (G, \top) dans un groupe (G', \top') . Le noyau de f est un sous-groupe distingué du groupe G .

Démonstration. On a $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{e\})$. Il est clair que $\{e\}$ est un sous-groupe distingué. Donc, d'après la propriété A.35, $f^{-1}(\{e\})$ est un sous-groupe distingué de G . On en conclut que $\text{Ker}(f)$ est un sous-groupe distingué de G . \square

Annexe B

Arbre de décision

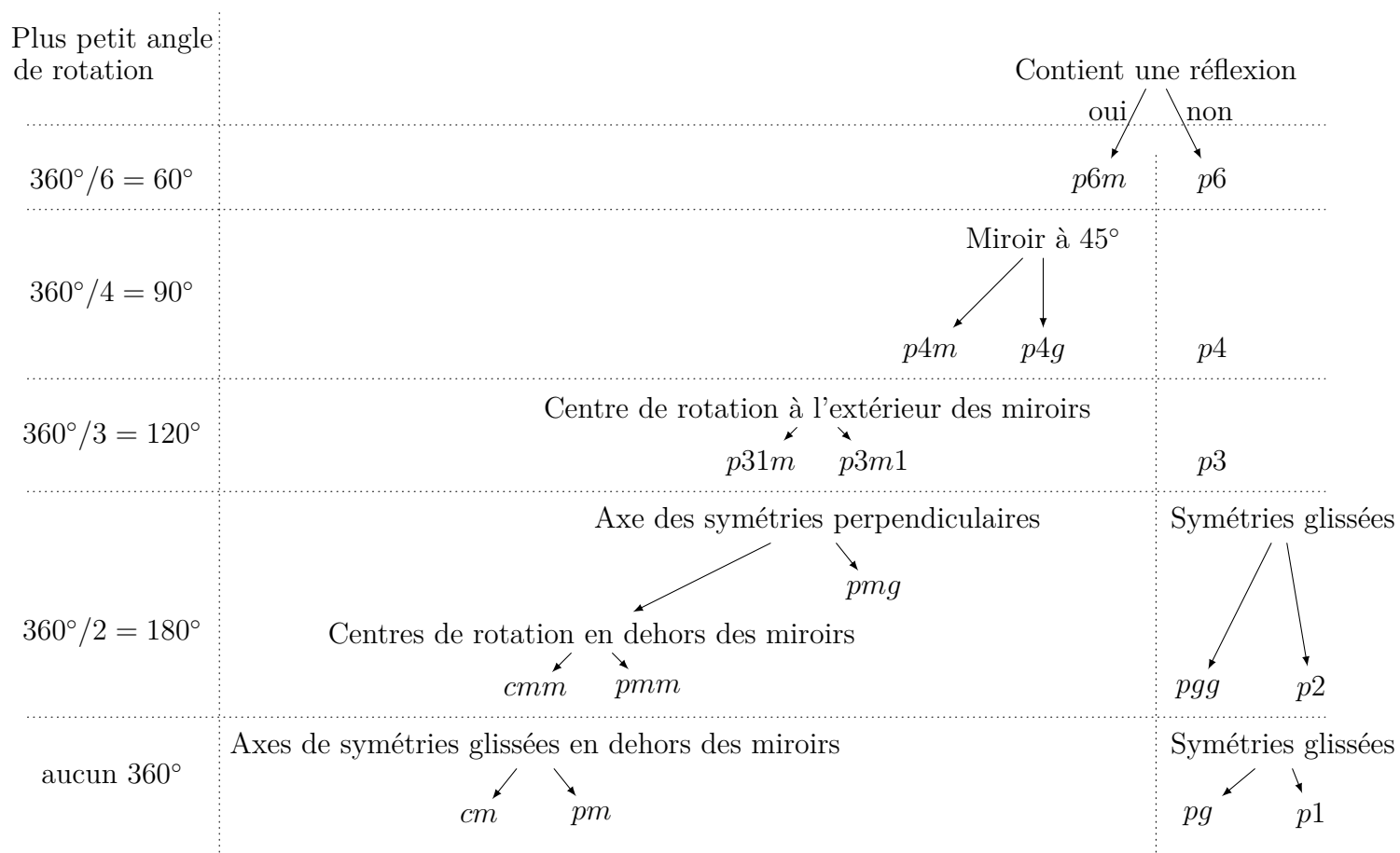


Table des figures

1.1	Représentation de la symétrie orthogonale justifiant la définition.	5
1.2	Exemple de symétrie orthogonale	11
1.3	Exemple de symétrie glissée	11
1.4	Exemple de rotation	12
2.1	Exemple de réseau	19
2.2	Groupe diédral D_1 (stabilisant le monogone)	23
2.3	Groupe diédral D_2 (stabilisant le digone)	23
2.4	Groupe diédral D_3 (stabilisant le triangle)	23
2.5	Groupe diédral D_4 (stabilisant le carré)	24
2.6	Groupe C_2	24
2.7	Groupe C_3	24
2.8	Groupe C_4	24
3.1	Deux motifs de groupe $p4m$	27
3.2	Deux motifs de groupe pmm	28
A.1	Représentation polaire d'un nombre complexe	50

Bibliographie

- [Abb17] Samy Abbes. *Notes de cours - Algèbre et Analyse fondamentales II*, 2017.
- [Blu] Zaïd Allybokus & Oscar Blumberg. Groupes cristallographiques, mémoire sous la direction de Philippe Gille. https://www.math.ens.fr/enseignement/telecharger_fichier.php?fichier=854.
- [Ive90] Birger Iversen. *Lectures on crystallographic groups*. 1990.
- [Kel] Bernhard Keller. *Notes manuscrites*, prises au fur et à mesure du semestre.
- [Kelva] Bernhard Keller. Cristal, logiciel de dessin périodique en Java. Disponible sur demande.
- [Mar02] François Liret & Dominique Martinais. *Algèbre et géométrie, deuxième année*. Dunod, 2002.
- [Mic91] Artin Michael. *Algebra*. Prentice Hall, 1991.
- [Per] Marie-Claude David, Frédéric Haglund & Daniel Perrin. *Document de travail pour la préparation au CAPES de mathématiques*, quatrième partie.
- [Ser58] Jean-Pierre Serre. *Homologie des groupes - Applications arithmétiques*. 1958.