

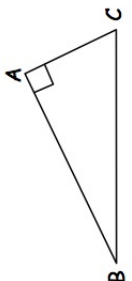
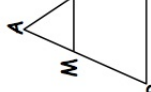
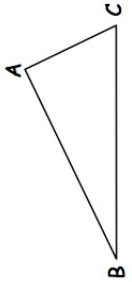
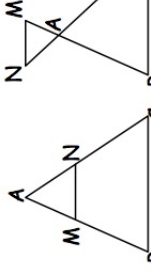
Deuxième partie

Géométrie

1 Géométrie plane

1.1 Théorèmes de Pythagore et de Thalès

Utiliser les théorèmes de Pythagore et de Thalès

	Calculer une longueur		Ce triangle est-il rectangle ?	Ces droites sont-elles parallèles ?
Situation	 Un triangle rectangle dont on connaît la longueur de deux côtés mais pas du troisième.	 Une situation de Thalès : configuration « triangle » ou « papillon ».	 Un triangle dont on connaît la longueur de trois côtés.	 Une figure qui « ressemble » à une situation de Thalès.
	A faire avant de citer la propriété	Le triangle ABC est rectangle en A.	Les triangles AMN et ABC sont en situation de Thalès car : → les droites (MN) et (BC) sont parallèles → les droites (MB) et (NC) sont sécantes en A	Le plus grand côté du triangle ABC est [BC]. D'une part : $BC^2 = \dots$ D'autre part : $AB^2 + AC^2 = \dots$
Propriété et conclusion	D'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ Il reste à remplacer les deux longueurs qu'on connaît par leurs mesures et à calculer la troisième.		Si les deux calculs ci-dessus donnent le même résultat : D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.	Si les deux calculs ci-dessus donnent le même résultat : D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
	Sinon : D'après le théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle. Sinon : D'après le théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.			
Rédaction				

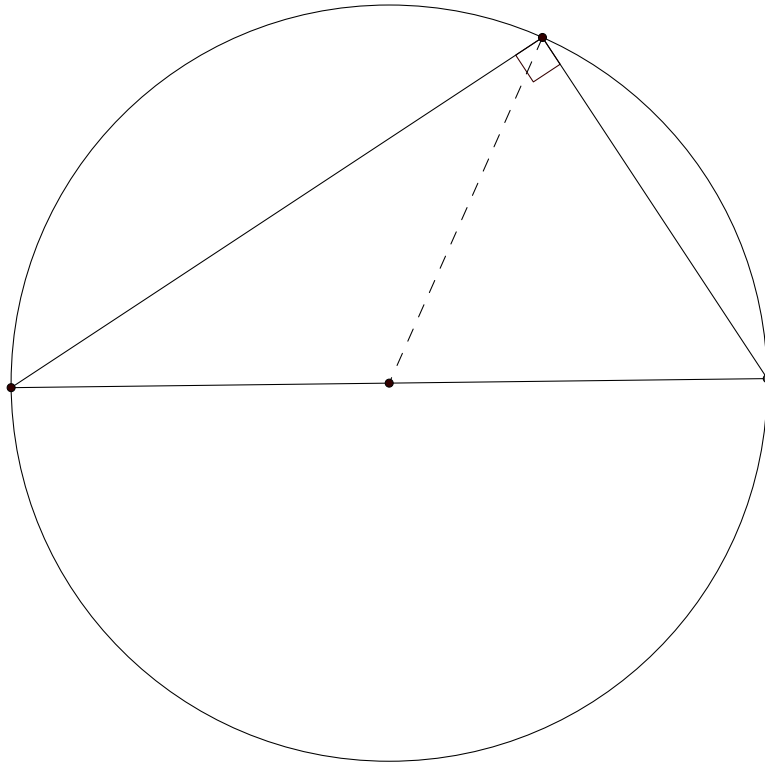
1.2 Méthodes pour...

1.2.1 Calculer une longueur

- Le théorème de Pythagore : si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Le théorème de Thalès : si deux triangles ABC et AMN sont en situation de Thalès, alors leurs côtés sont proportionnelles, c'est-à-dire :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

- La propriété : si un triangle est rectangle, alors l'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit au triangle :



- Les formules de trigonométrie.

1.2.2 Calculer des angles

- La propriété : la somme des angles dans un triangle est égale à 180 degrés.
- La propriété : dans un triangle isocèle, les deux angles à la base sont égaux.
- La propriété : dans un triangle rectangle, la somme des angles aigus est égale à 90 degrés.
- La propriété : dans un triangle équilatéral, chaque angle mesure 60 degrés.
- La définition de la bissectrice d'un angle.
- La propriété : deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
- La propriété : si deux droites parallèles sont coupées par une droite, alors deux angles correspondants ont la même mesure.
- La propriété : Si deux droites parallèles sont coupées par une droite, alors deux angles alternes-internes ont la même mesure.
- Dans un parallélogramme, deux angles opposés ont la même mesure.
- Les formules de trigonométrie.
- La propriété : la mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.
- La propriété : tous les angles inscrits dans un cercle interceptant le même arc sont égaux.

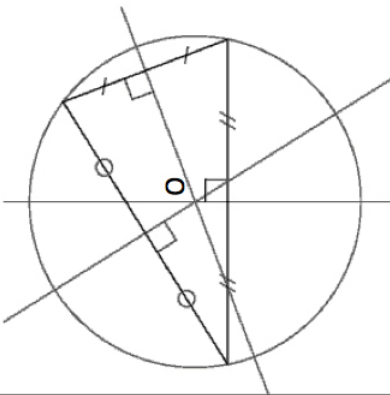
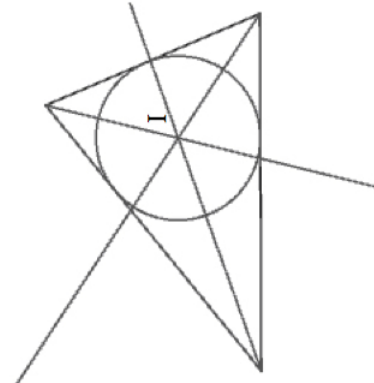
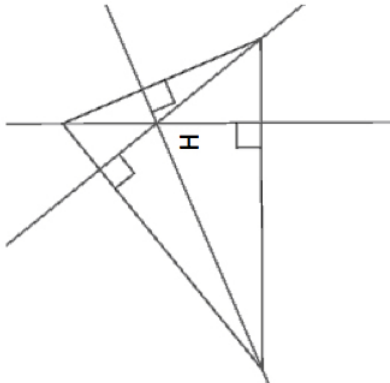
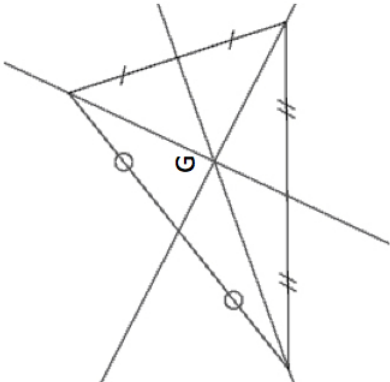
1.2.3 Démontrer que deux droites sont perpendiculaires

- La réciproque du théorème de Pythagore : dans un triangle, si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des autres côtés, alors ce triangle est rectangle.
- La propriété : si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle.
- La propriété : si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
- La mesure d'un angle droit est de 90 degrés (on peut donc essayer de calculer la mesure de l'angle concerné)
- La propriété : dans un triangle ABC , si la médiane issue du sommet A mesure la moitié de BC , alors le triangle ABC est rectangle en A .
- La propriété : si une droite est tangente à un cercle en un point, alors cette droite est perpendiculaire au rayon du cercle ayant ce point comme extrémité.

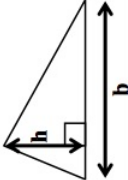
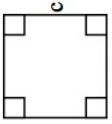
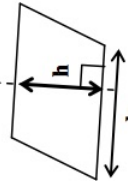
1.2.4 Démontrer que deux droites sont parallèles

- La réciproque du théorème de Thalès : si les points A , B et M sont alignés et les points A , C et N sont alignés dans le même ordre, et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) .
- La propriété : si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
- La propriété : si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
- La propriété : deux droites symétriques par rapport à un point sont parallèles.
- La définition du parallélogramme (il suffit de montrer que les deux droites sont les supports des côtés d'un parallélogramme).
- La propriété : si deux droites sont coupées par une sécante et déterminent deux angles correspondants de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.
- La propriété : si deux droites sont coupées par une sécante et déterminent deux angles alternes-internes de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.

1.3 Droites remarquables dans un triangle

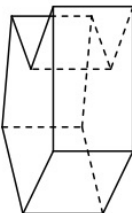
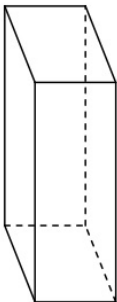
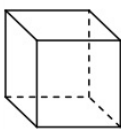
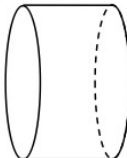
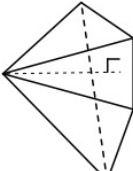
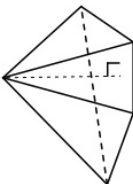
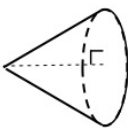
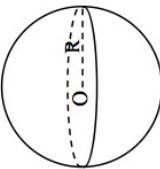
	Médiatrice (d'un segment)	Bissectrice (d'un angle)	Hauteur (d'un triangle)	Médiane (d'un triangle)
Définition	C'est une droite qui : - passe par le milieu du segment - est perpendiculaire au segment	C'est une droite qui : - passe par le sommet de l'angle - partage l'angle en deux angles de même mesure	C'est une droite qui : - passe par un sommet du triangle - est perpendiculaire au côté opposé	C'est une droite qui : - passe par un sommet du triangle - passe par le milieu du côté opposé
Propriétés	Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est à la même distance des extrémités de ce segment. Si un point est à la même distance des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice du segment.			
Illustration				
Point d'intersection	Les médiatrices des trois côtés d'un triangle sont concourantes : leur point d'intersection est le centre du cercle circonscrit au triangle.	Les bissectrices des trois côtés d'un triangle sont concourantes : leur point d'intersection est le centre du cercle inscrit au triangle.	Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes : leur point d'intersection est appelé orthocentre du triangle.	Les trois médianes d'un triangle sont concourantes : leur point d'intersection est appelé centre de gravité du triangle.

1.4 Figures planes

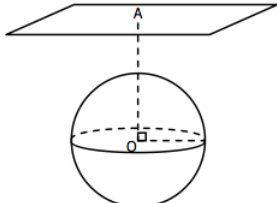
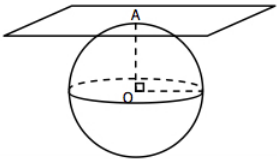
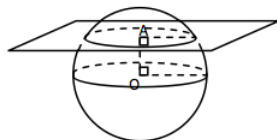
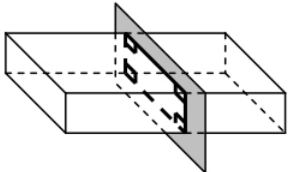
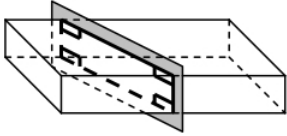
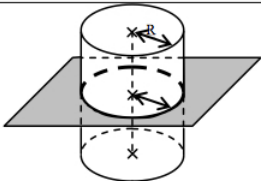
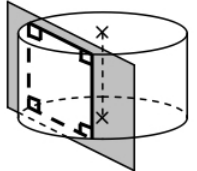
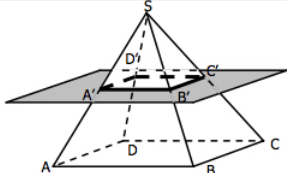
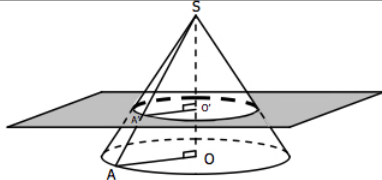
LES FIGURES PLANES		Figure	Aire	Périmètre (« la longueur du contour »)
Polygone	Polygone quelconque		pas de formule à apprendre	Il suffit d'additionner les longueurs des côtés !
	Triangle	Triangle quelconque 	$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$	
		Triangle rectangle 	$\frac{\text{produit des côtés de l'angle droit}}{2}$	
	Quadrilatère	Rectangle 	longueur x largeur	
		Carré 	côté x côté	
		Parallélogramme 	base x hauteur	
	Disque / Cercle Le disque de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $OM \leq R$ (un CD). Le cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M l'espace tels que $OM = R$ (un cerceau).		$\pi \times R^2$	$2 \times \pi \times R$

2 Géométrie dans l'espace

2.1 Solides

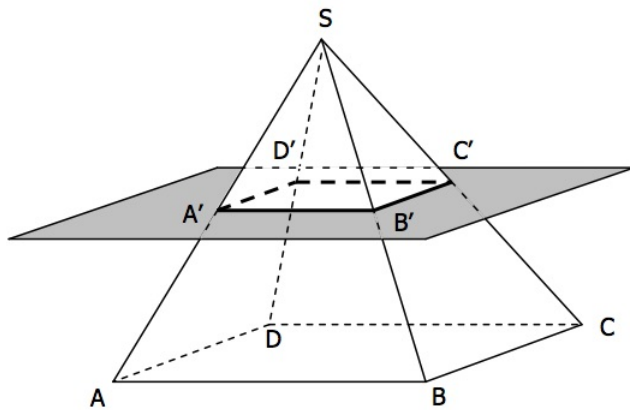
LES SOLIDES		Figure	Volume	Aire latérale (sans les bases)
Solides droits	Prisme solide ayant deux bases polygonales parallèles et superposables et dont toutes les faces latérales sont des rectangles		aire de la base $\times$ hauteur	périmètre de la base $\times$ hauteur
	Prisme quelconque			
	Pavé droit (ou parallélépipède rectangle)			
	Cube			
Solides pointus	Cylindre solide dont les deux bases sont des disques parallèles et superposables			
	Pyramide solide ayant une base polygonale et dont toutes les faces latérales sont des triangles		aire de la base $\times$ hauteur $\frac{\quad}{3}$	pas de formule à apprendre
	Cône solide dont la base est un disque et dont le sommet est sur la droite passant perpendiculairement par le centre de ce disque			
Boule / Sphère La boule de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M l'espace tels que $OM \leq R$ (une orange). La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = R$ (une balle de ping-pong).			volume de la boule $\frac{4}{3} \times \pi \times R^3$	aire de la sphère $4 \times \pi \times R^2$

2.2 Section de solides par un plan

SECTION PAR UN PLAN	Figure	Observations
Sphère La sphère est de rayon R . Le plan est perpendiculaire à (OA) . La distance du centre O de la sphère au plan est OA .		$OA > R$: le plan et la sphère n'ont aucun point commun
		$OA = R$: la section de la sphère par le plan est le point A. On dit que le plan et la sphère sont « tangents ».
		$OA < R$: la section de la sphère par le plan est un cercle de centre A. (Si le plan passe par le centre de la sphère, le cercle obtenu est appelé « grand cercle de la sphère ».)
Pavé droit (ou parallélépipède rectangle)		Le section du pavé droit par un plan parallèle à une face est un rectangle ayant les mêmes dimensions que cette face.
		La section du pavé droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle.
Cylindre		La section d'un cylindre par un plan parallèle à la base est un disque dont le rayon est le même que celui de la base.
		La section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe du cylindre est un rectangle.
Pyramide		La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de la même nature que la base.
Cône		La section d'un cône par un plan parallèle à la base est un disque.

2.3 Exemple à retenir

SABCD est une pyramide de sommet S à base carrée. Elle est coupée par un plan P (en gris) parallèle à sa base.



$$SA = 9 \text{ cm}$$

$$SA' = 3 \text{ cm}$$

$$AB = 6 \text{ cm}$$

Le théorème de Thalès appliqué à chaque face de la pyramide permet de démontrer l'égalité entre 8 fractions :

$$k = \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$$

Puisque SA' est plus petit que SA , le rapport k est plus petit que 1 : on dit que la pyramide $SA'B'C'D'$ est une réduction de $SABCD$ et k est appelé rapport de réduction (si k avait été plus grand que 1, on aurait parlé d'agrandissement).

Ici, le rapport de réduction est de :

$$k = \frac{SA'}{SA} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Lorsqu'on passe de $SABCD$ à $SA'B'C'D'$:

➤ Les longueurs sont multipliées par k :

$$A'B' = k \times AB = \frac{1}{3} \times 6 = \frac{6}{3} = 2 \text{ cm}$$

➤ Les aires sont multipliées par k^2 :

$$\text{aire de } A'B'C'D' = k^2 \times \text{aire de } ABCD = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 6 \times 6 = \frac{1}{9} \times 36 = \frac{36}{9} = 4 \text{ cm}^2$$

➤ Les volumes sont multipliés par k^3 :

$$\text{volume de } SA'B'C'D' = k^3 \times \text{volume de } SABCD = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \text{volume de } SABCD = \frac{1}{27} \times \text{volume de } SABCD$$