Matrice d'adjacence d'un graphe

↳ d'ordre n

Définition

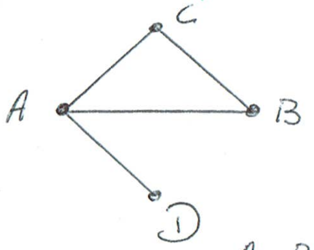
La matrice M d'adjacence d'un graphe d'ordre n est

- une matrice carrée d'ordre n ;
- le coefficient de M situé à l'intersection de la $i$ème ligne et la $j$ème colonne est le nombre d'arêtes reliant i à j.

Propriétés

- Si le graphe n'est pas orienté, la matrice d'adjacence est symétrique $({}^tM = M)$
- Si le graphe n'est pas orienté, le degré d'un sommet est la somme des coefficients en ligne (ou en colonne)
- Le terme de M^p situé à l'intersection de la $i$ème ligne et la $j$ème colonne est le nombre de chaînes de longueur p reliant i à j.

Exemple



$$M = \begin{array}{cccc|l} A & B & C & D & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & A \rightarrow \deg(A)=3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & B \rightarrow \deg(B)=2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & C \rightarrow \deg(C)=2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & D \rightarrow \deg(D)=1 \end{array}$$

$$M^2 = \begin{array}{cccc|c} A & B & C & D & \\ \boxed{3} & 1 & 1 & 0 & A \\ 1 & 2 & \boxed{1} & 1 & B \\ 1 & 1 & 2 & 1 & C \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 1 & D \end{array}$$

⟹ Il existe 3 chaînes de longueur 2 reliant A à A :

- A – B – A
- A – C – A
- A – D – A

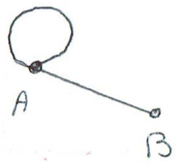
⟹ Il existe 1 chaîne de longueur 2 reliant B à C :

- B – A – C

⟹ Il n'existe pas de chaîne de longueur 2 reliant A à D.

⚠ Cas particuliers

①



à cause de la boucle

$$M = \begin{array}{ccc} A & B & \\ 1 & 1 & A \\ 1 & 0 & B \end{array} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \deg(A) = \boxed{3} \\ \longrightarrow \deg(B) = 1 \end{array}$$

3+1 = 4, et on a bien 2 arêtes ⟹ c'est cohérent

$$M^2 = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

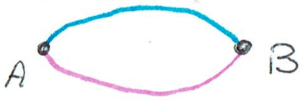
⟹ Il existe 2 chaînes de longueur 2 reliant A à A :

- A - A - A
- A - B - A

⟹ Il existe 2 chaînes de longueur 3 reliant A à B :

- A - A - A - B
- A - B - A - B

②



$$M = \begin{array}{ccc} A & B & \\ 0 & 2 & A \\ 2 & 0 & B \end{array}$$

$$M^2 = \begin{array}{ccc} A & B & \\ \boxed{4} & 0 & A \\ \boxed{0} & 4 & B \end{array} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{array}{ccc} A & B & \\ \boxed{0} & 8 & A \\ \boxed{8} & 0 & B \end{array}$$

⟹ Il existe 4 chaînes de longueur 2 reliant A à A :

- A - B - A
- A - B - A
- A - B - A
- A - B - A

⟹ Il n'existe pas de chaîne de longueur 2 reliant A à B.

⟹ Il n'existe pas de chaîne de longueur 3 reliant A à A

⟹ Il existe 8 chaînes de longueur 3 reliant A à B :

- A - B - A - B
- A - B - A - B
- A - B - A - B
- A - B - A - B
- A - B - A - B
- A - B - A - B
- A - B - A - B
- A - B - A - B