

Valeur absolue

Exemples rédigés

1) Résolution d'équations comportant des valeurs absolues

$$\bullet |x| = |3| \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

$$\mathcal{S} = \{-3, 3\}$$

$$\bullet |x+3| = |5-x| \Leftrightarrow x+3 = 5-x \text{ ou } x+3 = -(5-x)$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 5-x \text{ ou } x+3 = x-5$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2 \quad \text{ou} \quad 3 = -5$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \quad \quad \hat{\quad} \text{Impossible}$$

$$\text{D'où } \mathcal{S} = \{1\}$$

$$\bullet \sqrt{(4x-1)^2} = 2 \Leftrightarrow |4x-1| = 2$$

$$\Leftrightarrow 4x-1 = 2 \text{ ou } 4x-1 = -2$$

$$\Leftrightarrow 4x = 3 \quad \text{ou} \quad 4x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \quad \quad \quad x = -\frac{1}{4}$$

$$\text{D'où } \mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$$

$$\bullet |3x+8| = -1 \quad \text{Impossible : } \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0.$$

$$\text{D'où } \mathcal{S} = \emptyset.$$

2) Résolution d'inéquations

• $|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$ D'où $S =]-4; 4[$.

• $|x| \geq -2$ Toujours vrai, car $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ et $0 \geq -2$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq -2$. D'où $S = \mathbb{R}$.

• $|x| \leq -1$ Impossible, car $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$.

D'où $S = \emptyset$.

• $|x| \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{5}$ ou $-x \geq \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{5}$ ou $x \leq -\frac{3}{5}$

D'où $S =]-\infty; -\frac{3}{5}[\cup]\frac{3}{5}; +\infty[$.

3) Méthode

Équations

- 1) Isoler la valeur absolue d'un côté de l'égalité
- 2) Appliquer la définition ou $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
- 3) Résoudre les 2 équations obtenues
- 4) Écrire l'ensemble solution $S = \dots$

Inéquations

- 1) Isoler la valeur absolue d'un côté de l'inégalité
- 2) Appliquer la définition ou $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
 $\Leftrightarrow -a \leq x$ et $x \leq a$
- 3) Résoudre le système d'inéquations
- 4) Donner l'ensemble solution $S = \dots$

4) Plus dur... quand on ne peut pas isoler les valeurs absolues

$$|-3x + 4| + |-5 + x| = 10 \quad (E)$$

① On détermine les points d'annulation de chaque valeur absolue

$$|-3x + 4| = 0 \Leftrightarrow -3x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x = -4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$|-5 + x| = 0 \Leftrightarrow -5 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

② On remplit un tableau de forme, et on résout l'équation sur chaque intervalle

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	5	$+\infty$
$ -3x+4 $	$-3x+4$	0	$3x-4$	$3x-4$
$ -5+x $	$5-x$	$\frac{11}{3}$	0	$-5+x$
(E)	$-4x+9=10$ $x=-\frac{1}{4}$	$2x+1=10$ $x=\frac{9}{2}$	$4x-9=10$ $x=\frac{19}{4}$ et $\frac{19}{4} \notin [5, +\infty[$, donc ne convient pas	

Une équation de ce type n'a que 2 solutions

Ici, $x = \frac{19}{4}$ ne convient pas. (Il faut vérifier chaque solution !)

$$\text{Donc } S = \left\{ -\frac{1}{4}, \frac{9}{2} \right\}$$

$$|2x-1| \leq |x+2| \quad (I)$$

1) On détermine les points d'annulation de chaque valeur absolue

$$\begin{aligned} |2x-1| = 0 &\Leftrightarrow 2x-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x+2| = 0 &\Leftrightarrow x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

2) On remplit un tableau de formes, et on étudie l'inéquation sur chaque intervalle

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$ 2x-1 $	$-2x+1$	5	$-2x+1$	$2x-1$
$ x+2 $	$-x-2$	0	$x+2$	$x+2$
(I)	$-2x+1 \leq -x-2$ $x \geq 3$ ne convient pas car $[3; +\infty[\cap]-\infty; -2]$ S_1	$-2x+1 \leq x+2$ $x \geq -\frac{1}{3}$ S_2		$2x-1 \leq x+2$ $x \leq 3$ S_3

On a $S_1 = \emptyset$, $S_2 = [-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$ et $S_3 = [\frac{1}{2}; 3]$

Enfin, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

On en conclut que $S = [-\frac{1}{3}; 3]$