# Théorème des valeurs intermédiaires

## 1 Cours

### 1.1 Énoncé du théorème

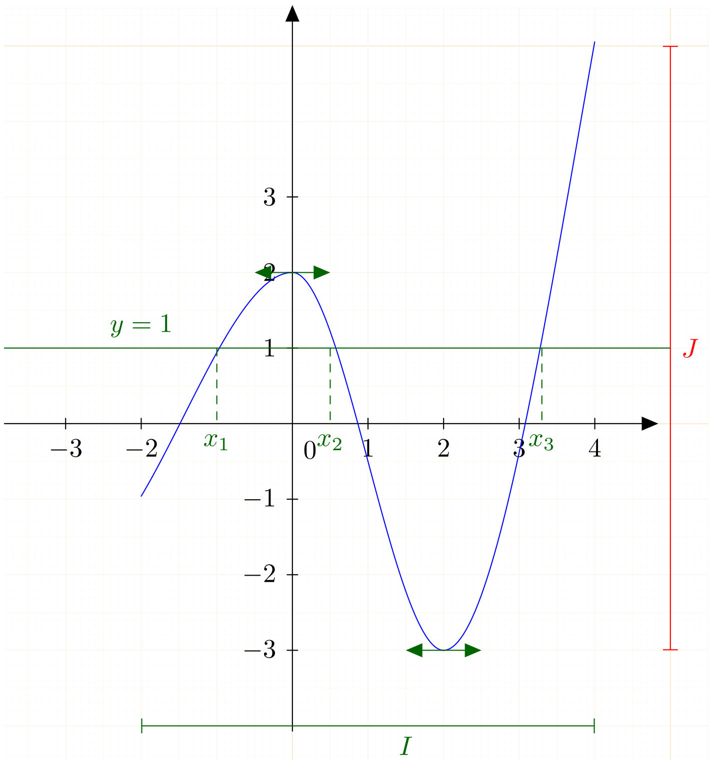
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ une fonction.

Soit $I$ un intervalle inclus dans $D_f$.
Soit $J$ l'image de $I$, c'est-à-dire l'ensemble des images des éléments de $I$.

- Soit $k \in J$.
- Supposons que $f$ est continue sur $I$.

Alors il existe au moins un $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = k$.

En d'autres termes, l'équation $f(x) = k$ **admet au moins une solution** sur $I$.




On a $I = [-2\ ;\ 4]$ et $J = [-3\ ;\ 5]$.

$f$ est continue sur $I$.

Prenons par exemple $k = 1$.

L'équation $f(x) = 1$ admet 3 solutions : $x_1$, $x_2$ et $x_3$.

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $C_f$ et de la droite d'équation $y = 1$.

## 1.2 Corollaire du théorème

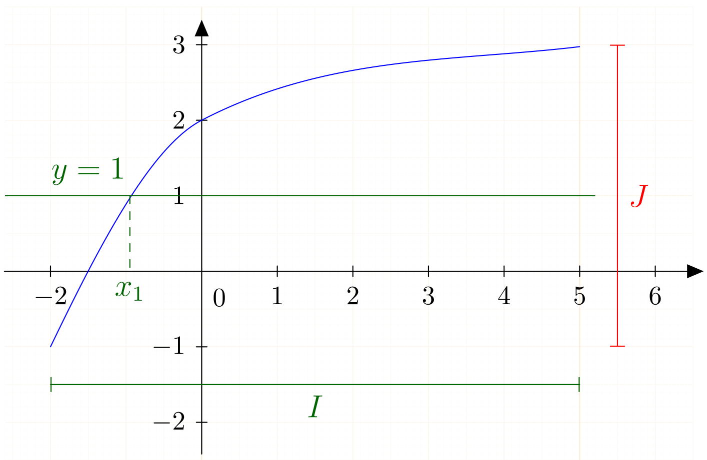
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ une fonction.

Soit $I$ un intervalle inclus dans $D_f$.
Soit $J$ l'image de $I$, c'est-à-dire l'ensemble des images des éléments de $I$.

- Soit $k \in J$.
- Supposons que $f$ est continue sur $I$.
- Supposons, de plus, que $f$ est strictement monotone sur $I$.

Alors il existe un unique $x_0$ unique appartenant à $I$ tel que $f(x_0) = k$.

En d'autres termes, l'équation $f(x) = k$ **admet une solution unique** sur $I$.




On a $I = [-2\ ;\ 5]$ et $J = [-1\ ;\ 5]$.

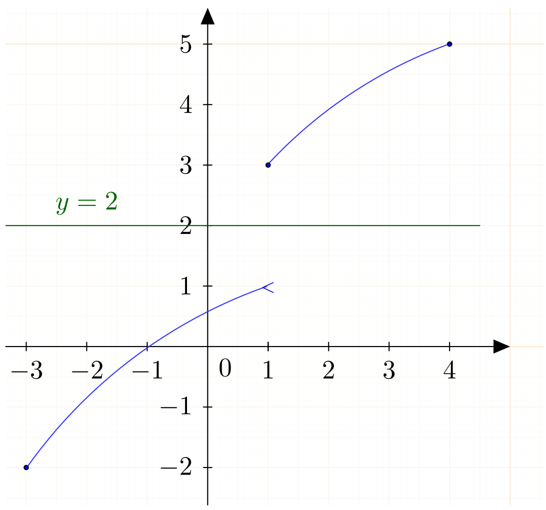
$f$ est continue sur $I$ et strictement croissante sur $I$.

Prenons par exemple $k = 1$.

L'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique.

Cette solution est l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = 1$.

## 1.3 Importance de la continuité




On a $I = [-3\ ;\ 4]$ et $J = [-2\ ;\ 5]$.

De plus, $k = 2$ et $2 \in J$.

Cependant, la fonction n'est pas continue sur $I$, et l'équation $f(x) = 2$ n'admet ici pas de solution.