2 Exemple rédigé

Soit la fonction $f: \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1. \end{array}$

1. Étudier et représenter graphiquement la fonction f.

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$.
   Déterminer un encadrement de chacune de ces solutions.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.
   Déterminer un encadrement de cette solution.

---

1. On a la fonction $f: \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1. \end{array}$

f est une polynôme, donc $D_f = \mathbb{R}$.

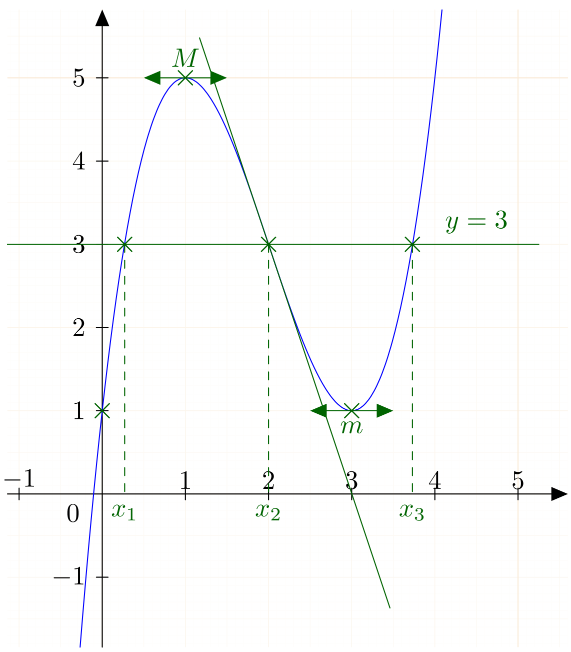
On a donc $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

On a enfin $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 12x + 9 = 0$
$\iff x = 1 \text{ ou } x = 3.$

On en déduit le tableau de signes et de variations suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$M\,(1\ ;\ 5)$ est un maximum local.
$m\,(3\ ;\ 1)$ est un minimum local.



2. On a $I =]-\infty\ ;\ +\infty[$ et $J =]-\infty\ ;\ +\infty[$.
   f est continue sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$.
   On pose $k = 3$, et on a bien $k \in J$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet trois solutions.
   Ces solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $y = 3$.

   - On a $0 < x_1 < 1$, car l'image de 0 est $f(0) = 1$, et $1 < 3$, et l'image de 1 est $f(1) = 5$, et $5 > 3$.
   - $x_2 = 2$.
   - $3 < x_3 < 4$, car l'image de 3 est $f(3) = 1$ et $1 < 3$, et l'image de 4 est $f(4) = 5$, et $5 > 3$.

   On a même, plus précisément :

   - $0,2 < x_1 < 0,3$ car $f(0,2) < 3 < f(0,3)$ d'après la calculatrice.
   - $x_2 = 2$.
   - $3,7 < x_3 < 3,8$ car $f(3,7) < 3 < f(3,8)$ d'après la calculatrice.

3. On a $I =]-1\ ;\ 0[$ et $J =]-15\ ;\ 1[$.
   f est continue et strictement croissante sur $]-1\ ;\ 0[$.
   On pose $k = 0$, et on a bien $k \in J$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0. Cette solution est l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $y = 0$, donc avec l'axe des abscisses.

   On a $-1 < x_0 < 0$, car $f(-1) = -15 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$ d'après la calculatrice.

   On a même, plus précisément :
   $-0,2 < x_0 < -0,1$ car $f(-0,2) = -1,048 < 0$ et $f(-0,1) = 0,39 > 0$ d'après la calculatrice.

   Et encore plus précisément :
   $-0,11 < x_0 < -0,10$ car $f(-0,11) = -0,07 < 0$ et $f(-0,10) = 0,39 > 0$ d'après la calculatrice.