Mathématiques Année 2016-2017
1ère S **feuille n° 1**

La démonstration - TD n° 1

Introduction

Le but de ce devoir est d'apprendre les principes fondamentaux de la démonstration en mathématiques, tout en revoyant un point important du programme : l'étude des fonctions.

« Démontrer », c'est partir d'un point de départ pour arriver à un point d'arrivée.

- Le point d'arrivée est donné dans la question : « Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ ». Le point d'arrivée est donc la dernière phrase qu'il faudra écrire (ici : la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$). Il n'est pas le point de départ (on ne peut pas supposer f croissante sur $\mathbb{R}$, car c'est ce que l'on veut montrer à la fin).
- Le point de départ est une propriété vraie, car on l'a déjà démontrée, ou admise (soit précédemment, soit dans le cours)

Dans tout la suite, on supposera vraies les propriétés usuelles sur les dérivées, et on rappellera le théorème fondamental, qui s'énonce ainsi : soit f est une fonction dérivable. Alors :

- Si $f'(x) > 0$, alors f est croissante.
- Si $f'(x) < 0$, alors f est décroissante.

Contexte historique

Certaines fonctions, telle que $x \longmapsto 10^x$ sont extrêmement simples à appréhender. $x \longmapsto 10^x$ est évidemment croissante. Mais comment le « démontrer » ? On n'a pas (du moins en classe de première) de méthode pour calculer la dérivée de $x \longmapsto 10^x$. Lorsqu'un tel problème se pose, les mathématiciens essaient de l'extrapoler, et d'utiliser une méthode capable de résoudre le problème considéré, mais tout autre problème analogue en même temps (i.e. [1] l'étude de toutes les fonctions comme $x \longmapsto 10^x$, $x \longmapsto 20^x$...).

En 1676, Newton a envoyé deux lettres nommées *Epistola prior* et *Epistola posterior* à Leibniz dans lesquelles il affirme avoir trouvé une façon toute nouvelle décrire les puissances. Leibniz utilisera les concepts découverts par Newton et amènera l'exposant « variable » (par exemple : 10^x). Ces concepts reposent sur la fonction f que l'on va étudier.

Objet d'étude

On se donne une fonction f défie sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1$$

On ne sait rien d'autre sur la fonction f (c'est sa définition) : elle est sa propre dérivée et qu'elle vérifie $f(0) = 1$.

On **admettra** (mais cela peut se démontrer à partir des deux seules propriétés qui précèdent) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$.

1. id este : expression latine très fréquemment utilisée en mathématiques, qui veut dire « c'est-à-dire ».

Questions

On a donc à notre disposition quatre propriétés (question 0. : Stabylotez les propriétés sur le sujet !) qui peuvent être utilisées pour répondre aux questions qui suivent. Il est bien évident que les résultats d'une question peuvent être utilisés dans une question suivante.

Les étoiles qui précèdent le nom des questions indiquent la difficulté de la question ((*) = facile, (**) = moyen, (***) = difficile).

1. (*) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

2. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{f(x+b)}{f(b)}$, où b est un réel.

   a. (***) Montrer que [2] : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = g(x)$.
   b. (*) Montrer que $g(0) = 1$
   c. (*) En déduire [3] que $g = f$.
   d. (*) Montrer que $f(x) \times f(b) = f(x+b)$ pour tout valeur de $x \in \mathbb{R}$.
   e. (*) Conclure que, si $a \in \mathbb{R}$, alors $f(a+b) = f(a) \times f(b)$.

3. (**) En utilisant le fait que $a - b = a + (-b)$, montrer que $f(a-b) = \dfrac{f(a)}{f(b)}$.

   Par la suite, on admettra [4] que $f(na) = f(a)^n$.

4. a) (*) D'après $f(na) = f(a)^n$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$.
   b) (*) En déduire que f est positive ou nul sur $\mathbb{R}$.
   c) (*) Conclure que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

5. (**) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6. (*) Montrer que la tangente au point d'abscisse 0 a comme équation [5] $y = x + 1$.

7. Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x - 1$.

   a) (*) Dresser le tableau de variation de la fonction h, et montrer que la fonction admet un minimum [6] en 0.
   b) (*) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geqslant h(0)$.
   c) (*) En déduire que $h(x) \geqslant 0$.
   d) (*) Conclure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant x + 1$.

8. En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x} = 1$.
   (remarque : on peut replacer x par h pour s'aider, et remarquer que $x = 0 + x$).

---

2. Rappel : si a et b sont deux réels et u une fonction, alors $[u(ax+b)]' = au'(ax+b)$
3. Dès que l'on rencontre « en déduire », cela signifie qu'il faut se servir de ce que l'on vient de démontrer dans la ou les questions qui précèdent directement la question que l'on cherche à résoudre.
4. on peut montrer cela par un raisonnement particulier au programme de terminale S.
5. Rappel : l'équation de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
6. Rappel : une fonction u admet un maximum / minimum en a si u' s'annule en a et change de signe « avant et après » a