Suites géométriques

1 Définition

Définitions : suite géométrique / raison Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- (u_n) est une suite géométrique si, et seulement si, il existe un réel q tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$.
- q est appelé la raison de la suite géométrique.

2 Terme général

Dans tout ce qui suivra, on considèrera (u_n) une suite géométriques de premier terme u_0 et de raison q.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$

Attention : Ceci est vrai si la suite est définie sur $\mathbb{N}$! Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
On retiendra : $\boxed{u_n = \text{premier}_{\text{terme}} \times \text{raison}^{\text{nombre}_{\text{de termes}}}}$.

3 Somme des termes d'une suite géométrique

On veut calculer $S = \underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n}_{n+1 \text{ termes}}$.

On a $S = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Attention ! Ceci est vrai si on a $n+1$ termes dans la somme ! On a $u_1+u_2+...+u_n = u_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

On retiendra : $\boxed{S = \text{premier}_{\text{termes}} \times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}}$.

4 Sens de variations des suites géométriques

Remarque Pour calculer le sens de variation d'une suite, il est **très** souvent **très** efficace de s'intéresser au signe de $u_{n+1} - u_n$.

Dans le cas des suites arithmétiques, on a $u_{n+1} = u_n + r$, i.e. $u_{n+1} - u_n$. On factorise, et on étudie le signe.

5 Calcul du nombre de termes

Pour calculer le nombre de termes, on s'intéresse à l'indice du premier et à l'indice du dernier, et on a : $\text{nombre}_{\text{de termes}} = \text{indice}_{\text{du premier terme}} - \text{indice}_{\text{du dernier terme}} \boxed{+1}$.

Suites arithmétiques : exemples rédigés

1 Autour de la suite...

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = 2 \times 3^n$.

1.1 Calcul des premiers termes

On a :

- $u_0 = 2 \times 3^0 = 2 \times 1 = 2$
- $u_1 = 2 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$
- $u_2 = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$
- $u_3 = 2 \times 3^3 = 2 \times 27 = 54$
- $u_4 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$

1.2 Prouver qu'il s'agit d'une suite arithmétique (passage à l'expression par récurrence)

On a $\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 \times 3^{n+1} \\ &= 2 \times (3^n \times 3) \\ &= (2 \times 3^n) \times 3 \\ &= u_n \times 3 \end{aligned}$

D'où $\forall n \in \mathbb{R}, u_{n+1} = u_n \times 3$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de 1er terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

1.3 Sens de variation

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$.

On a $3^{n+1} = 3^n \times 3$. Donc $\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 \times 3^n \times 3 - 2 \times 3^n \\ &= 2 \times 3^n (3-1) \\ &= 2 \times 3^n \times 2 \\ &= 4 \times 3^n \end{aligned}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n > 0$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2 Autour de la somme des termes de la suite...

2.0.1 Exercice n° 1 : la somme des puissances de 2

Soit $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n$. Calculer S.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$.

On peut écrire $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n$.

La somme des termes de la suite est donnée par $S = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

$S = 1 \times \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2}$

$S = -1 \times (1 - 2^{n+1})$

$S = -1 + 2^{n+1}$

Donc $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = -1 + 2^{n+1}$

2.0.2 Exercice n° 2

Soit $S = 5 + 15 + 45 + 135 + ... + 295245$. Calculer S.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite géométrique de premier terme $u_1 = 5$ et de raison $q = 3$.

On peut écrire $S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n$.

La somme des termes de la suite est donnée par $S = u_1 \dfrac{1-q^{n}}{1-q}$.

On cherche à connaître le rang n du terme $u_n = 295245$.

$$\begin{array}{lcl} u_n & = & 295245 \\ u_1 q^{n-1} & = & 295245 \\ 5 \times 3^{n-1} & = & 295245 \\ 3^{n-1} & = & 59049 \end{array}$$

À la calculatrice, on trouve que $n - 1 = 10$ car $3^{10} = 59049$.

D'où $n = 11$.

Enfin, $S = 5 \times \dfrac{1-3^{11}}{1-3} = 442865$

3 Exercice récapitulatif

1. Soit $(u_n)_{u\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique décroissante définie par : $\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 999 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = 729000 \end{cases}$

   Déterminer u_0, u_1 et u_2

2. Soit $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.
   Déterminer n tel que $S = 999999$.

---

1) On peut dire que $u_1 = u_0 \times q$ et $u_2 = u_0 + \times q^2$.
On peut aussi dire $u_0 = \dfrac{u_1}{q}$ et $u_2 = u_1 \times q$.

On a alors $\dfrac{u_1}{q} \times u_1 \times (u_1 \times q) = 729000$

Ainsi, $u_1^3 = 729000$ et $u_1 = 729000^{\frac{1}{3}}$.

D'où $u_1 = 90$

On sait que $u_0 + u_1 + u_2 = 999$

Il vient que $\dfrac{90}{q} + 90 + 90q = 999$.

$\dfrac{90}{q} + 90q = 909$

$\dfrac{90 + 90q^2}{q} = 909$

$90q^2 + 90 = 909q$

$90q^2 - 909 + 90 = 0$

Donc $q = \dfrac{1}{10}$ ou $q = 1$.

Cependant, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc $q \neq 10$.

Ainsi, $q = \dfrac{1}{10}$.

On a donc $u_0 = \dfrac{u_1}{q} = \dfrac{90}{\frac{1}{10}} = 900$, $u_1 = 90$ et $u_2 = u_1 q = 90 \times \dfrac{1}{10} = 9$.

2) On cherche à trouver n tel que $u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 999999$

$$900 \frac{1 - \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{10}} = 999999$$

$$1000\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right]=999999$$

$$1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}=0,999999$$

$$-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}=-0,000001$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}=0,000001$$

$$n+1=6$$

$$n=5.$$