Suites arithmétiques

1 Définition

Définitions : suite arithmétique / raison Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- (u_n) est une suite arithmétique si, et seulement si, il existe un réel r tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.
- r est appelé la raison de la suite arithmétique.

2 Terme général

Dans tout ce qui suivra, on considèrera (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$

Attention : Ceci est vrai si la suite est définie sur $\mathbb{N}$! Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = u_1 + (n-1)\,r$.
On retiendra : $\boxed{u_n = \text{premier}_{\text{terme}} + \text{nombre}_{\text{de termes}} \times \text{raison}}$.

3 Somme des termes d'une suite arithmétique

On veut calculer $S = \underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n}_{n+1 \text{ termes}}$.

On a $S = (n+1)\,\dfrac{u_0 + u_n}{2}$

Attention ! Ceci est vrai si on a $n+1$ termes dans la somme ! On a $u_1+u_2+...+u_n = n\dfrac{u_1+u_n}{2}$.

On retiendra : $\boxed{S = \text{nombre}_{\text{de termes}} \times \dfrac{\text{premier}_{\text{terme}} + \text{dernier}_{\text{termes}}}{2}}$.

4 Sens de variations des suites arithmétiques

Remarque Pour calculer le sens de variation d'une suite, il est **très** souvent **très** efficace de s'intéresser au signe de $u_{n+1} - u_n$.

Dans le cas des suites arithmétiques, on a $u_{n+1} = u_n + r$, i.e. $u_{n+1} - u_n = r$. Donc :

- Si $r > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

5 Calcul du nombre de termes

Pour calculer le nombre de termes, on s'intéresse à l'indice du premier et à l'indice du dernier, et on a : $\text{nombre}_{\text{de termes}} = \text{indice}_{\text{du premier terme}} - \text{indice}_{\text{du dernier terme}}\ \boxed{+1}$.

Suites arithmétiques : exemples rédigés

1 Autour de la suite...

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = 3n - 5$.

1.1 Calcul des premiers termes

- $u_0 = 3 \times 0 - 5 = -5$
- $u_1 = 3 \times 1 - 5 = -2$
- $u_2 = 3 \times 2 - 5 = 1$
- $u_3 = 3 \times 3 - 5 = 4$
- $u_4 = 3 \times 5 - 5 = 7$

1.2 Prouver qu'il s'agit d'une suite arithmétique (passage à l'expression par récurrence)

$$\begin{array}{rcl} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & 3\,(n+1) - 5 \\ & = & 3n + 3 - 5 \\ & = & 3n - 5 + 3 \\ & = & u_n + 3 \end{array}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{R}, u_{n+1} = u_n + 3$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de 1^{er} terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.

1.3 Sens de variation

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n = 3$.

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2 Autour de la somme des termes de la suite...

2.0.1 Exercice n° 1 : la suite de Gauß, exemple

Soit $S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$. Donner la valeur de S.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison 1.

On peut écrire $S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n$

Donc $S = n\dfrac{1+n}{2}$

Ainsi, $\boxed{1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}}$

Attention Cet exemple est fondamental, et le résultat encadré est à connaître par cœur !

2.0.2 Exercice n° 2

Soit $S = 7 + 18 + 29 + 40 + ... + 2856$. Donner la valeur de S.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 7$ et de raison $r = 11$.

La somme des termes de la suite est donnée par $S = n\dfrac{u_1 + u_n}{2}$.

On cherche à connaître le rang n du terme $u_n = 2856$.

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & u_1 + (n-1)\,r \\ & = & 7 + 11\,(n-1) \\ & = & 7 + 11n - 11 \\ & = & 11n - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{On a donc } 11n - 4 & = & 2856 \\ 11n & = & 2860 \\ n & = & 260 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{D'où } S & = & n\dfrac{u_1 + u_n}{2} \\ & = & 260 \times \dfrac{7 + 2856}{2} \\ & = & 372\ 190 \end{array}$$

D'où $S = 372\ 190$.

2.0.3 Exercice n° 3

Soit $S = 3 + 8 + 13 + 18 + ... + 1003$. Donner la valeur de S.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $r = 5$.

La somme des termes de la suite est donnée par $S = n\dfrac{u_1 + u_n}{2}$.

On cherche à connaître le rang n du terme $u_n = 1003$.

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & u_1 + (n-1)\,r \\ & = & 3 + 5\,(n-1) \\ & = & 3 + 5n - 5 \\ & = & 5n - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{On a donc } 5n - 2 & = & 1003 \\ 5n & = & 1005 \\ n & = & 201 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{D'où } S & = & n\dfrac{u_1 + u_n}{2} \\ & = & 201 \times \dfrac{3 + 1003}{2} \\ & = & 101\ 103 \end{array}$$

D'où $S = 101\ 103$.

3 Exercice récapitulatif

1. Soit $(u_n)_{u\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique décroissante définie par : $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=270 \\ u_0\times u_1\times u_2=720000 \end{cases}$

   Déterminer u_0, u_1 et u_2

2. Soit $S=u_0+u_1+u_2+...+u_n$. Déterminer n tel que $S=450$.

---

1. On peut dire que $u_1=u_0+r$ et $u_2=u_0+2r$.
   On peut aussi dire $u_0=u_1-r$ et $u_2=u_1+r$.

   On a alors $(u_1-r)+u_1+(u_1+r)=270$

   Ainsi, $3u_1=270$ et $u_1=90$.

   On sait que $u_0\times u_1\times u_2=720000$

   Il vient que $(90-r)\times 90\times(90+r)=720000$.

   $(90-r)(90+r)=\dfrac{720000}{90}$

   $8100-r^2=8000$
   $-r^2=-100$
   $r^2=100$
   Donc $r=10$ ou $r=-10$.

   Cependant, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc $r<0$.

   Ainsi, $r=-10$.

   On a donc $u_0=100$, $u_1=90$ et $u_2=80$.

2. On cherche à déterminer n tel que $S=450$, i.e. n tel que $(n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}=450$

   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0=100$ et de raison $r=-10$.

   On a $u_n=u_0+nr=100-10n$

   Donc on résout $(n+1)\dfrac{100+(100-10n)}{2}=450$

   $(n+1)(100-5n)=450$
   $100n-5n^2+100-5n=450$
   $-5n^2+95n-350=0$
   $n=5$ ou $n=14$

   Et en effet :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccc} u_0 & + & u_1 & + & u_2 & + & u_3 & + & u_4 & + & u_5 & + & u_6 & + & u_7 & + & u_8 & + & u_9 & + & u_{10} & + & u_{11} & + & u_{12} & + & u_{13} & + & u_{14} \\ 100 & + & 90 & + & 80 & + & 70 & + & 60 & + & 50 & + & 40 & + & 30 & + & 20 & + & 10 & + & 0 & - & 10 & - & 20 & - & 30 & - & 40 \end{array}$$