1 Méthode générale de résolution d'une question fréquemment présente dans les exercices sur les suites dans les sujets de bac

1.1 Énoncé

On définit une suite arithmético-géométrique par son premier terme et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

Il est fréquent que tombe souvent la définition d'une suite auxiliaire (v_n), et qui nous permet d'étudier la suite (u_n).

Le but de cette première partie est de montrer que (v_n) est une suite géométrique, dans la plupart des cas (ceci sera toujours précisé dans l'énoncé du sujet de bac).

1.2 Principe de résolution

1.2.1 Suite géométrique auxiliaire

La résolution de ce type d'exercice est toujours la même. Il faut la retenir (on pourra se souvenir des mots en gras).

Rappelons les données :

(1.) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$

(2.) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \lambda$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique revient à, en rappelant la **définition**, montrer que $v_{n+1} = q \times v_n$, où q est à déterminer. Ceci est donc le but, ce que l'on doit trouver à la fin.

D'après la **donnée (2.)**, on peut affirmer que $v_{n+1} = u_{n+1} - \lambda$.

Puis, d'après la **donnée (1.)**, on peut remplacer u_{n+1} par sa valeur. On a ainsi $v_{n+1} = au_n + b - \lambda$.

Ensuite, il faut **transformer la définition de la suite**. La transformation est toujours la même, au lieu que v_n soit isolé, on isole u_n. On a la relation $v_n = u_n - \lambda \iff u_n = v_n + \lambda$.

On peut ensuite **remplacer** $\mathbf{u_n}$ par cette nouvelle valeur dans notre calcul.
On a alors $v_{n+1} = a(u_n - \lambda) + b - \lambda$.

Enfin, on **développe** les calculs, et il suffit ensuite de **simplifier** les constantes.
On obtient alors $v_{n+1} = av_n$.

Remarque : La raison de (v_n) est la valeur de la constante présente devant u_n
dans la définition de (u_n).

1.2.2 Fin de l'exercice

En rappelant que, si (v_n) est une suite géométrique, alors son terme général est de la forme $v_n = v_0 \times q^n$, on peut exprimer u_n (car on a $v_n = u_n - \lambda \iff u_n = v_n + \lambda \iff u_n = v_0 \times q^n + \lambda$.

L'expression de v_n sous forme général permet de conclure sur la limite de v_n, quand n tend vers $+\infty$. On rappelle que si $0 < q < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ et que si $1 < q$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Ceci permet de conclure, par limite de produit, sur la limite de v_n. Si $0 < q < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et si $1 < q$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Cela permet de conclure sur la limite de u_n. En effet, on a remontré plus haut la relation $u_n = v_n + \lambda$. Donc, par limite de somme, si $0 < q < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\right) + \lambda = \lambda$. C'est le cas le plus fréquent dans les exercices de type bac.

On a aussi si $1 < q$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\right) + \lambda = +\infty$.

Remarque : Le cas où (v_n) n'admet pas de limite n'est pas traité.