L'algorithmique au lycée

DHÉNIN Sacha

Quelques notions clefs

L'algorithmique et les suites (1)

- Le but d'un algorithme, c'est de faire des calculs à la place de l'homme.
  Sur les suites, c'est pratique, comme ça, l'homme n'a pas à calculer les termes intermédiaires, si c'est seulement le 20ème terme qui l'intéresse.

- Mais pour faire ces calculs, il faut un indice qui monte…
  On calcule le 1er terme, le 2e, le 3e… Et il faut que la machine sache quel « numéro » de terme elle calcule.

- La notion d'indice sur une variable n'existe pas en algorithmique.

Règles à retenir !

- Après avoir identifié l'indice variant (s'il y en a un), il prend **toujours** la valeur de son successeur. Donc on a : n prend la valeur n + 1

L’algorithmique et les suites (2)

- Mais, si la machine a besoin d’un indice pour calculer le terme suivant, et savoir quel numéro c’est, elle a aussi besoin de savoir où on commence, et comment on passe de l’un à l’autre !

Règles à retenir !

- Dans le traitement, après avoir identifié l'indice variant (s'il y en a un), il prend **<u>toujours</u>** la valeur de son successeur.
  Donc on a : <u>n prend la valeur n + 1</u>

- Dans l'initialisation, la première valeur appliquée à la variable que l'on cherche est <u>le premier terme de la suite</u>.

- Dans le traitement, on recherche toujours où l'on peut placer la <u>formule de récurrence</u>.

L'algorithmique et les suites (3)

- Il faut avoir clairement son objectif en tête !
- Si on cherche « à partir de quand … », on cherche le rang du terme, donc l'indice variant…
- Si on cherche « quel est <u>le terme</u> », on cherche un terme…
- Il faut faire attention à ce que l'on affiche à la fin !

Règles à retenir !

- Dans le traitement, après avoir identifié l'indice variant (s'il y en a un), il prend **toujours** la valeur de son successeur. Donc on a : n prend la valeur n + 1

- Dans l'initialisation, la première valeur appliqué à la variable que l'on cherche est le premier terme de la suite.

- Dans le traitement, on recherche toujours où l'on peut placer la formule de récurrence.

- Savoir clairement ce que l'on cherche : un terme ou un indice ?

Exercices d'application

1) Compléter des algorithmes

Rochambeau 2014

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3) L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.
Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables :	n est un entier naturel a est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800

Traitement :	Tant que $a < 1\,100$, faire :
	    Affecter à a la valeur ...
	    Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin de Tant que

Sortie :	Afficher n

Antilles Guyane 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{cases}$$

4) Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

Entrée	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 et u prend la valeur 2

Traitement	Tant que ... (1)
	  n prend la valeur ... (2)
	  u prend la valeur ... (3)
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

Nouvelle Calédonie. Novembre 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=5-\frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x$.

1) Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2) Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On note α la solution.
On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3) On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.
Sur la figure de l'**annexe 1**, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.
Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

4) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$$

où α est le réel défini dans la question 2.

b) Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ?

5) Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n.$$

a) Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

b) Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.

c) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

Entrée	n un entier naturel
Variables	u et s sont des variables réelles n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1 s prend la valeur u i prend la valeur 0 Demander la valeur de n

Traitement	Tant que ...
	        Affecter à i la valeur $i+1$
	        Affecter à u la valeur ...
	        Affecter à s la valeur ...
	Fin tant que

Sortie	Afficher s

Antilles & Guyanne - Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Compléter l'algorithme donné en **annexe** afin qu'il calcule S_{100}.

Déclaration des variables :	S et u sont des nombres réels k est un nombre entier
Initialisation :	u prend la valeur …… S prend la valeur ……

Traitement :	Pour k variant de 1 à ….
	    u prend la valeur $u \times e^{-u}$
	    S prend la valeur ……
	Fin Pour
	Afficher ……

Liban 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+i)z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1) Calculer u_0.

2) Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.

3) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

5) Etant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables :	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 Demander la valeur de p
Traitement :	
Sortie :	

2) Comprendre des algorithmes

Polynésie 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables	n est un entier naturel u est un réel	**Variables**	n est un entier naturel u est un réel
Entrée	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n

Traitement	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n :
	  u prend la valeur $u + 2i + 2$
	Fin Pour
		Traitement :	u prend la valeur 0
			Pour i allant de 0 à $n - 1$:
			  u prend la valeur $u + 2i + 2$
			Fin Pour

Sortie	Afficher u	**Sortie**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

Pondichéry 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1) Donner la forme exponentielle du nombre $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ $\longrightarrow$ $\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$

2) a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

c) Que dire de la longueur OA_n quand n tend vers $+\infty$?

3) On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R > P$
	    n prend la valeur $n+1$
	    R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

b) Pour $P = 0,01$, on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

3) Modifier des algorithmes

1) On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? (u_n) *est une suite géométrique, de premier terme* $u_0 = 10$ *et de raison* $q = 0{,}8$.

b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 10 \times 0{,}8^n$

c) Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse. $u_n < \frac{1}{100} \times u_0 \Leftrightarrow 10 \times 0{,}8^n < 0{,}01 \times 10 \Leftrightarrow n > 20{,}6 \Leftrightarrow n \geq 21$

2) Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit.
Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.
Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n.
L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

Variables :	n est un entier naturel v est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10
Traitement	Pour n allant de 1 à 15 Affecter à v la valeur $0,8 \times v$ Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v + 4$ Afficher v Fin de boucle

a) Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4					8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b) Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

c) On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.
Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.