1 Équation n° 1

$$\begin{aligned} e^{3x} = 1 &\iff e^{3x} = e^0 \\ &\iff 3x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

D'où S = {0}.

2 Inéquation n° 1

$$\begin{aligned} e^{3x} \geqslant 1 &\iff e^{3x} \geqslant e^0 \\ &\iff 3x \geqslant 0 \\ &\iff x \geqslant 0 \end{aligned}$$

D'où S = [0 ; +∞[.

3 Équation n° 2

$$\begin{aligned} e^{-x^2} = e^{2x+1} &\iff -x^2 = 2x+1 \\ &\iff x^2+2x+1 = 0 \end{aligned}$$

On étudie le trinôme x^2+2x+1.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 1 \times 1 = 0$.

$\Delta = 0$, donc le trinôme à une racine :

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2} = -1$.

Ainsi le trinôme peut se factoriser sous cette forme :

$$\begin{aligned} x^2+2x+1 = 0 &\iff 1\,(x-1)^2 = 0 \\ &\iff x-1 = 0 \\ &\iff x = 1. \end{aligned}$$

D'où S = {1}.

4 Inéquation n° 2

$$\begin{aligned} e^{-x^2+x} \leqslant 1 &\iff e^{-x^2+x} \leqslant e^0 \\ &\iff -x^2+x \leqslant 0 \\ &\iff x\,(-x+1) \leqslant 0 \end{aligned}$$

On peut ainsi dresser le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x\,(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où S =]−∞ ; 0] ∪ [1 ; +∞[.

5 Inéquation n° 3

$$
\begin{aligned}
e^{x-3} \geqslant \frac{1}{e^{x}} &\iff e^{x-3} \geqslant e^{-x} \\
&\iff x-3 \geqslant -x \\
&\iff 2x \geqslant 3 \\
&\iff x \geqslant \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

D'où $S = \left[\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

6 Inéquation n° 4

$$
\begin{aligned}
e^{x^{-1}} \leqslant e^{x-2} &\iff e^{x-2} \\
&\iff x^{-1} \leqslant x-2 \\
&\iff \frac{1}{x} \leqslant x-2 \\
&\iff x-2-\frac{1}{x} \geqslant 0 \\
&\iff \frac{x^2-2x-1}{x} \geqslant 0
\end{aligned}
$$

On étudie le trinôme x^2-2x-1.

On a $\Delta = b^2-4ac = 4-4\times 1\times(-1) = 4+4 = 8$.

$\Delta > 0$, donc le trinôme admet deux racines réelles :

$x_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2}$.

Or, $\sqrt{8} = \sqrt{2\times 4} = \sqrt{2}\times\sqrt{4} = 2\sqrt{2}$.

D'où $x_1 = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi $x_1 = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = 1+\sqrt{2}$.

On sait aussi que $a > 0$ dans le trinôme étudié, on peut donc en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		0		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2x-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-2x-1}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

D'où $S = \left[1-\sqrt{2}\,;\,0\right[\cup \left[1+\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$.

7 Équation n° 3

$e^{2x} + e^x - 2 = 0$.

On pose $X = e^x$.

L'équation devient $X^2 + X - 2 = 0$.

On étudier le trinôme $X^2 + X - 2$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$.

$\Delta > 0$, donc le trinôme admet deux solutions :

$$
\begin{array}{lll}
X_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{ou} & X_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
X_1 = \dfrac{-1-3}{2} & \text{ou} & X_2 = \dfrac{-1+3}{2} \\
X_1 = \dfrac{-4}{2} & \text{ou} & X_2 = \dfrac{2}{2} \\
X_1 = 2 & \text{ou} & X_2 = 1
\end{array}
$$

On peut donc factoriser l'expression, et l'équation de vient :

$$
\begin{aligned}
X^2 + X - 2 = 0 &\iff 1\,(X-1)\,(X+2) = 0 \\
&\iff X - 1 = 0 \text{ ou } X + 2 = 0 \\
&\iff X = 1 \text{ ou } X = -2 \\
&\iff e^x = 1 \text{ ou } e^x = -2
\end{aligned}
$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, donc l'équation $e^x = -2$ n'a pas de solutions réelles.

De plus, $e^x = 1 \iff e^x = e^0 \iff x = 0$.

Donc $S = \{0\}$.

8 Équation n° 4

$e^{2x} - (e+1)\,e^x + e = 0$.

On pose $\mathrm{X} = e^x$.

L'équation devient $\mathrm{X}^2 + (e+1)\mathrm{X} + e = 0$.

On étudier le trinôme $\mathrm{X}^2 + (e+1)\mathrm{X} + e$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (e+1)^2 - 4 \times 1 \times e = e^2 + 2e + 1 - 4e = e^2 - 2e + 1 = (e-1)^2$.

$\Delta > 0$, donc le trinôme admet deux solutions :

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{X}_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{ou} & \mathrm{X}_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
\mathrm{X}_1 = \dfrac{(e+1)-(e-1)}{2} & \text{ou} & \mathrm{X}_2 = \dfrac{(e+1)+(e-1)}{2} \\
\mathrm{X}_1 = \dfrac{e+1-e+1}{2} & \text{ou} & \mathrm{X}_2 = \dfrac{e+1+e-1}{2} \\
\mathrm{X}_1 = \dfrac{2}{2} & \text{ou} & \mathrm{X}_2 = \dfrac{2e}{2} \\
\mathrm{X}_1 = 1 & \text{ou} & \mathrm{X}_2 = e
\end{array}$$

On peut donc factoriser l'expression, et l'équation de vient :

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{X}^2 + (e+1)\mathrm{X} + e = 0 & \iff & 1\,(\mathrm{X}-1)\,(\mathrm{X}-e) = 0 \\
& \iff & \mathrm{X}-1 = 0 \text{ ou } \mathrm{X}-e = 0 \\
& \iff & \mathrm{X} = 1 \text{ ou } \mathrm{X} = e \\
& \iff & e^x = 1 \text{ ou } e^x = e \\
& \iff & e^x = e^0 \text{ ou } e^x = e^1 \\
& \iff & x = 0 \text{ ou } x = 1
\end{array}$$

Donc $\mathrm{S} = \{0\,;\,1\}$.

9 Inéquation nº 5

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} \geqslant 2 &\iff e^x + \frac{1}{e^x} - 2 \geqslant 0 \\ &\iff \frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{e^x} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^x} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{(e^x - 1)^2}{e^x} \geqslant 0. \end{aligned}$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x - 1)^2 \geqslant 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{(e^x - 1)^2}{e^x} \geqslant 0$.

Ainsi, $\mathrm{S} = \mathbb{R}$.

10 Équation nº 5

$e^x = -2$.

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

Donc $\mathrm{S} = \varnothing$.

11 Inéquation nº 6

$e^x \geqslant -2$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ et $0 > -2$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > -2$.

Ainsi, $\mathrm{S} = \mathbb{R}$.

12 Système de deux équations à deux inconnues

$\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ 2e^x - 3e^y = -5 \end{cases}$.

On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$.

$$\text{Le système devient} \begin{cases} X + Y = 5 \\ 2X - 3Y = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} X = 5 - Y \\ 2(5 - Y) - 3Y = -5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X = 5 - Y \\ 10 - 2Y - 3Y = -5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X = 5 - Y \\ -5Y = -15 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X = 5 - Y \\ Y = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X = 2 \\ Y = 3 \end{cases}$$

On peut donc maintenant en déduire les valeurs de x et y :

$$\begin{cases} X = 2 \\ Y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} e^x = 2 \\ e^y = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \ln 2 \\ y = \ln 3 \end{cases}$$

D'où $S = \{(\ln 2\,;\ \ln 3)\}$.