Récapitulatif du cours - Probabilités / lois

On rappelle que la variance est le carré de l'écart-type, i.e. $V(X) = \sigma^2(X)$, ou encore $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Lois discrètes

Si X suit une loi discrète, on a $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

De plus, si X suit une loi discrète, on a $V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x)$ (c'est une définition, mais n'est pas à connaître).

On a aussi (formule de Huygens) : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
(c'est cette formule qui est exigible au bac).

Nom de la loi	Univers	Description	Espérance	Variance	Remarques
Loi de Bernoulli $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$P(X=0) = 1-p$ $P(X=1) = p$	p	$p(1-p)$	
Loi binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$\subset [\![0,n]\!]$	$\forall k \in [\![0,n]\!], P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	Voir 1.

1. Pour justifier l'emploi d'une loi binomiale (ce fait souvent l'objet d'une question de Bac sur 0,5 point) :
   - On réalise une expérience au hasard ;
   - Cette expérience a deux issues (succès ou échec) ;
   - Ces issues de l'expérience sont indépendantes.

Lois continues

Si X suit une loi continue et admet une fonction de densité f, on a $E(X) = \int_{X(\Omega)} xf(x)\ \mathrm{d}x$.

De plus, sous les mêmes hypothèses, on a $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

Nom de la loi	Densité	Description	Espérance	Variance	Remarques
Loi uniforme $X \hookrightarrow U$ sur $[a, b]$	$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$	$P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$ $P(X \leqslant x) = \dfrac{x-a}{b-a}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	Voir 2.
Loi exponentielle $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$P(a \leqslant X \leqslant b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ $P(X \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	Voir 3.
Loi normale centrée réduite $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$	Tous les calculs sont faits à la calculatrice.	0	1	Voir 4.
Loi normale $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	Tous les calculs sont faits à la calculatrice.	μ	σ^2	Voir 5. Voir 6.

1. Une fonction f est une fonction de densité si et seulement si :
   - f est continue ;
   - f est positive ;
   - $\int_{X(\Omega)} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$.
2. Pour la loi uniforme, la variance n'est pas à connaître pour le bac.
3. Attention à l'ordre entre a et b !
4. Attention à bien connaître les valeurs remarques, comme (par exemple) les intervalles à un, deux et trois sigmas. Aucune des propriétés de la loi normale centrée réduite n'est à négligée, elles sont toutes utiles pour le bac.
5. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $X' = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. C'est cette propriété qui sert à résoudre la plupart des exercices sur la loi normale (quand ces exercices ne peuvent pas être faits à la calculatrice).
6. La fonction de densité pour la loi normale n'est pas à connaître pour le bac.