Exercice récapitulatif : Loi binomiale

Un élève se rend à vélo à son lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 km.h^{-1}. Sur le parcours, il rencontre 6 feu tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit vert est $\frac{2}{3}$. Un feu rouge ou orange fait perdre une minute et demie.

On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours, et T la variable aléatoire égale au temps (en minutes) mis par l'élève pour aller au lycée.

1 Première partie : généralités

1. Justifier précisément que X suit une loi binomiale de paramètres que l'on précisera.
2. Exprimer T en fonction de X.

2 Deuxième partie : la crevaison

Au nveau du troisième feu, l'élève roule sur une punaise et la roue avant de son vélo crève. Il s'arrête 15 minutes au feu pour changer la roue.

Dans les questions qui suivent, on répondra sans utiliser le fait que X suit une loi binomiale.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilités à trois niveaux (car on s'arrête au bout de 3 feux).
2. Déterminer la probabilité que le feu auquel l'élève s'arrête soit le deuxième feu rouge qu'il rencontre.
3. Sachant que les feux qu'il a rencontrés précédemment étaient tous verts, calculer la probabilité que le feu auquel il s'arrête soit rouge.
4. Exprimer à nouveau T en fonction de X.

3 Troisième partie : étude du trajet total

On considère cette fois l'ensemble du trajet de l'élève.

1. Calculer la probabilité que l'élève rencontre 4 feux verts. On détaillera soigneusement les calculs et on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Déterminer la loi de probabilité de X. Les résultats seront arrondis à 5 décimales. Aucune justification n'est demandée.
3. Calculer la probabilité qu'il rencontre plus de 2 feux rouges. On justifiera soigneusement les calculs, et on donnera le résultat sous forme décimale.
4. Calculer la probabilité qu'il rencontre strictement moins de 5 feux rouges. On justifiera soigneusement les calculs, et on donnera le résultat sous forme décimale.
5. Calculer de deux façons différentes l'espérance de X.
6. Calculer de deux façons différentes l'écart-type de X.
7. Sachant que $E(aX+b) = aE(X)+b$, calculer l'espérance de T.
8. Sachant que $\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)$, calculer l'écart-type de T.
9. Interpréter le résultat de la question 7.
10. L'élève part 33 minutes avant le début des cours :
    a) Peut-il espérer être à l'heure ?
    b) Calculer la probabilité qu'il soit en retard.

4 Intervalle de fluctuation au seuil de 95 %

On s'intéresse maintenant aux feux rouges.

En 2015, le maire de la ville où habite l'élève, qui compte plusieurs milliers de feux, a demandé à une société de vérifier l'état de fonctionnement des feux. L'entreprise étudie chaque feu de la ville, et le résultat indique que 75 % des feux rouges fonctionnaient correctement.

Cette année, le maire veut savoir si c'est toujours le cas. Faute de restrictions budgétaires, il va demander à une entreprise d'effectuer le même travail qu'en 2015, mais dans un quartier plus restreint de la ville.

1. Sous l'hypothèse que la proportion de 2015 et toujours valable cette année, déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des feux qui fonctionnent, en supposant qu'il y a 100 feux dans le quartier choisi pour l'étude.
2. L'entreprise informe le maire que 64 % des feux du quartier fonctionnent correctement. Le maire peut-il toujours supposer que les trois quarts des feux de sa ville fonctionnent correctement ?